Pomocný text ke 4. sérii

ÚHLY VŠUDE, KAM SE PODÍVÁŠ

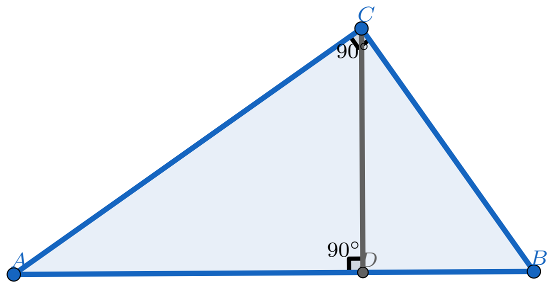
autor: *Dalibor Kramář*

V této sérii budeme řešit geometrické úlohy a budeme počítat s velikostmi úhlů. Obvykle budeme využívat toho, že nějaké úhly jsou stejné. Kde všude najdeme stejné úhly? Pojďme se podívat na několik možností, které se nám při řešení úloh nabízí, jako jsou podobné trojúhelníky, rovnoramenné trojúhelníky a obvodové, středové a úsekové úhly. Doporučujeme se nad příklady nejdřív zamyslet a teprve potom si přečíst řešení. Nenechte se odradit délkou textu, půlka z toho jsou obrázky.

1 Podobné trojúhelníky

Podobné (nebo shodné) trojúhelníky nám dávají častokrát hned několik stejných úhlů.

Příklad. Trojúhelník $\triangle ABC$ má pravý úhel u vrcholu C. Bod D je pata výšky z vrcholu C. Úsečka AD má délku 8, úsečka BD má délku 2. Jak dlouhá je úsečka CD?

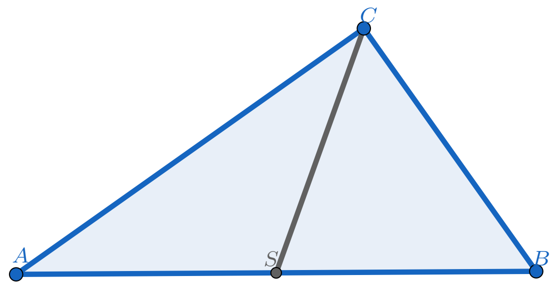


Řešení. Označme α úhel $\sphericalangle CAB$. Úhel $\sphericalangle ACD = \frac{\pi}{2} - \alpha$. A tedy $\sphericalangle DCB = \alpha$. Jelikož D je pata výšky, pak úhly ADC i CDB jsou pravé. Proto jsou trojúhelníky $\triangle ADC$ a $\triangle CDB$ jsou podobné podle věty uu. Z podobnosti plyne $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD} \Leftrightarrow CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot BD} = \sqrt{8 \cdot 2} = 4$.

2 Rovnoramenné trojúhelníky

Další možnost je použití rovnoramenných trojúhelníků. Ty nám umožní převést shodné úhly na stejné délky stran a naopak.

Příklad (Thaletova věta). Je dána úsečka AB. Bod S je středem úsečky. Zvolme bod C takový, že neleží na přímce AB. Dokažte, že trojúhelník ABC je pravoúhlý právě tehdy, když $SA = SC$.



Řešení. Označme α úhel $\sphericalangle CAB$ a β úhel $\sphericalangle ABC$. Ekvivalenci obvykle dokazujeme jako dvě implikace. Nejdříve ukažme, že pokud $SA = SC$, pak je trojúhelník pravoúhlý.

Vidíme, že trojúhelník ASC je rovnoramenný (se základnou AC). Stejně tak trojúhelník BSC je rovnoramenný se základnou BC, protože $SB = SA = SC$. Tedy $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACS + \sphericalangle BCS = \alpha + \beta$. Protože součet úhlů v trojúhelníku ABC je π, tak dostaneme $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = \pi \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

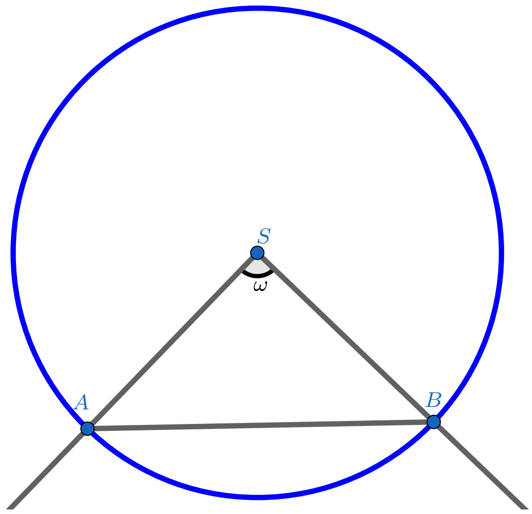
Nyní ukažme, že pokud trojúhelník je pravoúhlý, pak $SA = SC$. Jelikož součet úhlů v trojúhelníku je π. Pak $\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi \Leftrightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Zvolme bod X na úsečce AB, tak aby platilo $\sphericalangle ACX = \alpha$. Nahlédněme, že $\sphericalangle XCB = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ACX = \frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$. Vidíme, že trojúhelníky $\triangle\ AXC$ a $\triangle\ BXC$ jsou rovnoramenné. Tedy $XA = XC = XB$. To znamená, že X je středem úsečky AB (neboť $X \in AB$) a tedy $X = S$. Proto $SA = XA = XC = SC$.

3 Obvodové a středové úhly

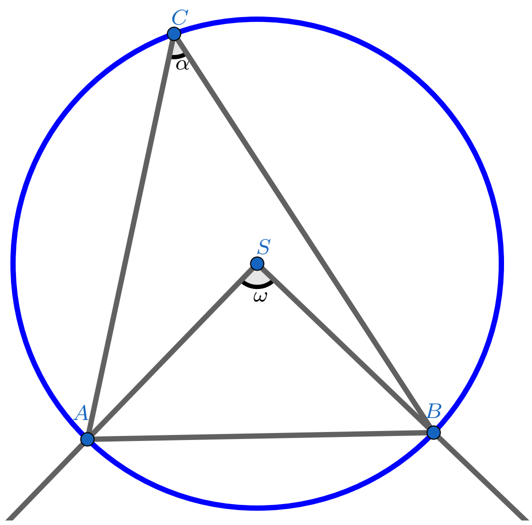
Pokud se v úloze vyskytne kružnice, tak se často používá k „přenosu úhlu na jiné místo“. Pojďme se detailněji podívat, jak to funguje.

Definice. Nechť k je kružnice se středem S a poloměrem r. Nechť úsečka AB je tětiva kružnice k. Úhel $\sphericalangle ASB$ nazveme středový úhel kružnice k. Středový úhel obvykle značíme ω. (Viz obrázek 1.)

Definice. Nechť k je kružnice se středovým úhlem $\sphericalangle ASB$. Bod C nechť leží na kružnici k mimo úhel $\sphericalangle ASB$. Úhel $\sphericalangle ACB$ nazveme obvodový úhel k úhlu $\sphericalangle ASB$. Obvodový úhel obvykle značíme α. (Viz obrázek 2.)



Obrázek 1: Středový úhel $\sphericalangle ASB$



Obrázek 2: Obvodový úhel $\sphericalangle ACB$ (k úhlu $\sphericalangle ASB$)

BRKOS Team 2020

Věta (Věta o obvodovém a středovém úhlu)**.** Velikost obvodového úhlu α je $\frac{1}{2}$ velikosti středového úhlu ω. ($\omega = 2\alpha$)

Důkaz. Označme si kružnici k, tětivu AB, střed kružnice S a obvodový úhel $\sphericalangle ACB = \alpha$. Rozlišíme tři případy. (Vidět je můžete na obrázku 3.)

Pokud S leží na úsečce AC, tak trojúhelník $\triangle\ BSC$ je rovnoramenný. Z dopočtu do přímého úhlu v trojúhelníku $\triangle\ BSC$ dostaneme, že $\sphericalangle BSC = \pi - \alpha - \alpha = \pi - 2\alpha$. Úhel $\sphericalangle ASB$ je vedlejší k úhlu $\sphericalangle BSC$, jeho velikost je tedy $\pi - (\pi - 2\alpha) = 2\alpha$. (Pokud S leží na úsečce BC, tak je důkaz analogický.)

Pokud S leží uvnitř úhlu $\sphericalangle ACB$, tak uvažme polopřímku CS. Polopřímka protne kružnici k v bodě X (tak, že X je různé od C). Označme úhly $\sphericalangle ACX$ a $\sphericalangle BCX$ jako α_1 a α_2. Z předchozího případu víme, že $\sphericalangle ASX = \omega_1 = 2\alpha_1$ a $\sphericalangle BSX = \omega_2 = 2\alpha_2$. Sečtením úhlů $\sphericalangle ASX$ a $\sphericalangle BSX$ dostaneme $\omega = \omega_1 + \omega_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\alpha$, protože α_1 a α_2 jsou obvodové úhly, kde S prochází ramenem úhlu.

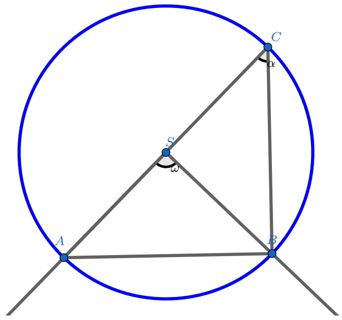
Pokud S leží vně úhlu $\sphericalangle ACB$, tak uvažme polopřímku CS. Polopřímka protne kružnici k v bodě X (tak, že X je různé od C). Označme úhly $\sphericalangle ACX$ a $\sphericalangle BCX$ jako α_1 a α_2. Z předchozího případu víme, že $\sphericalangle ASX = \omega_1 = 2\alpha_1$ a $\sphericalangle BSX = \omega_2 = 2\alpha_2$. Odečtením úhlů $\sphericalangle ASX$ a $\sphericalangle BSX$ dostaneme $\omega = |\omega_1 - \omega_2| = |2\alpha_1 - 2\alpha_2| = 2\alpha$.

Věta o obvodovém a středovém úhlu má jeden důležitý důsledek:

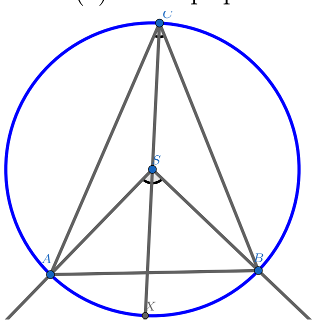
Věta. Obvodové úhly příslušné stejnému středovému úhlu mají stejnou velikost.

Důkaz. Podle věty o obvodovém a středovém úhlu víme, že každý obvodový úhel má poloviční velikost oproti svému středovému úhlu. A jelikož, středový úhel sdílejí, tak musí mít stejnou velikost.

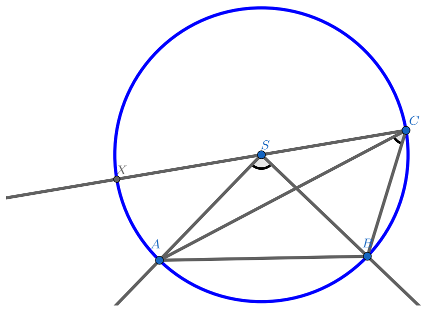
Na obrázku 4 můžeme vidět několik shodných obvodových úhlů ($\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle AC'B$ a $\sphericalangle AC''B$). Také si můžeme všimnout bodu D a úhlu $\sphericalangle ADB$. Ten nemá stejnou velikost jako předchozí úhly, protože přísluší jinému středovému úhlu (tomu obrácenému). Vidíme tedy, že nestačí, aby úhly „ležely“ na stejné kružnici, ale musí mít také stejný středový úhel.



(a) První případ



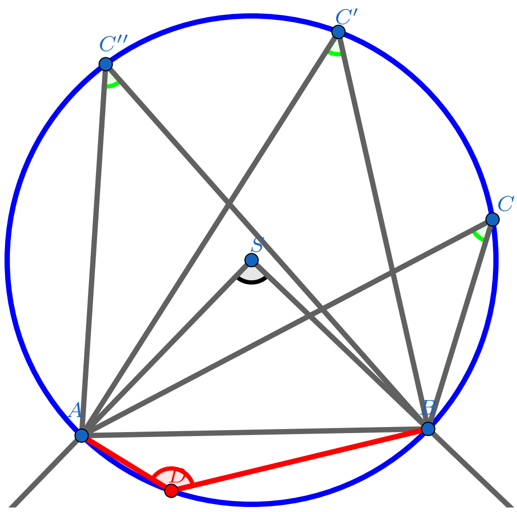
(b) Druhý případ



(c) Třetí případ

Obrázek 3: Důkaz věty o obvodovém a středovém úhlu.

BRKOS Team 2020



Obrázek 4: Obvodové úhly příslušné středovému úhlu $\sphericalangle ASB$.

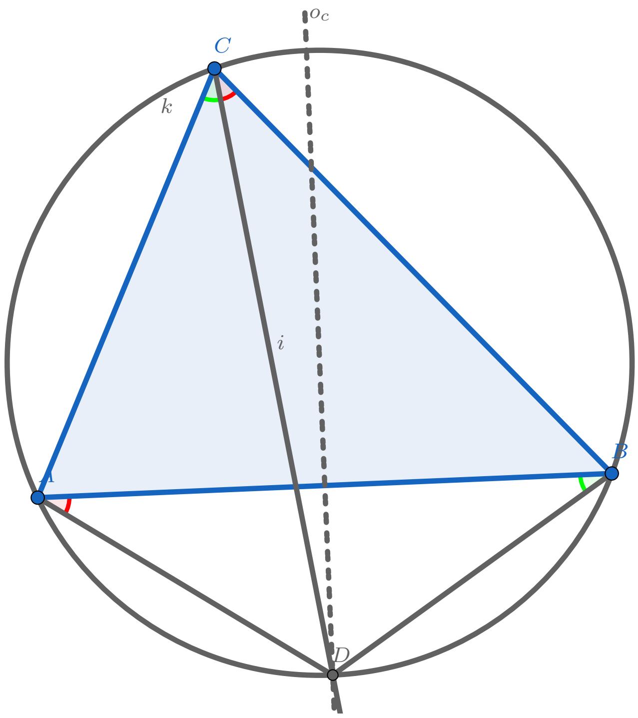
BRKOS Team 2020

Příklad. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$ (tj, jeho body leží na jedné kružnici). Dokažte, že $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD = \pi$.

Řešení. Uvažme úhlopříčku BD. A středové úhly $\sphericalangle BSD$ (jsou dva, jeden je nekonvexní). Označme ω_1 středový úhel obsahující bod C a ω_2 středový úhel obsahující bod A. Jejich součet je 2π. Využijme větu o obvodovém a středovém úhlu: $2\pi = \omega_1 + \omega_2 = 2\sphericalangle DAB + 2\sphericalangle BCD \Leftrightarrow \sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD = \pi$.

Příklad. Je dán trojúhelník $\triangle\ ABC$. Označme o_c osu úsečky AB. Osa o_c protne kružnici opsanou trojúhelníku $\triangle\ ABC$ v bodě D v polorovině opačné k ABC (tj. body C a D leží na opačných stranách přímky AB). Ukažte, že bod D leží na ose úhlu γ.

Řešení. Jelikož bod D leží na ose úsečky AB, pak je trojúhelník ABD rovnoramenný. Tedy úhly $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DBA$ jsou shodné. S využitím dvojic obvodových úhlů dostáváme $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DCB$ a $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DCA$. Tedy $\sphericalangle BCD = \sphericalangle DCA$ a přímka CD je osou úhlu γ.



Věta (Úsekový úhel)**.** Buď $\sphericalangle ACB$ obvodový úhel kružnice k. Bod X nechť leží na tečně ke kružnici k z bodu B v polorovině opačné k ABC (tj body C a X leží na opačných stranách přímky AB). Potom $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABX$.

Důkaz. Označme úhel $\sphericalangle ACB$ jako α. Uvažme středový úhel $\sphericalangle ASB = \omega$ příslušný k danému obvodovému úhlu. Rozlišme tři případy. (Úhel α je vnitřní úhel trojúhelníku, proto nemůže být přímý ani nekonvexní.)

Předpokládejme, že α je ostrý úhel. Nechť S_0 je pata výšky trojúhelníku ABS na stranu AB. Úhel $\sphericalangle S_0SB$ je roven α, neboť $\sphericalangle S_0SB = \frac{\sphericalangle ASB}{2} = \frac{\omega}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$. Jelikož úhel $\sphericalangle SS_0B$ je pravý, pak úhel $\sphericalangle SBA = \frac{\pi}{2} - \alpha$. A jelikož tečna z bodu B je kolmá na poloměr BS, pak $\sphericalangle ABX = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \alpha$.

Pokud α je pravý úhel, pak z thaletovy věty úsečka AB je průměr (tedy BS je poloměr) a tečna z bodu B je kolmá na poloměr BS.

Předpokládejme, že úhel α je tupý. Nechť S_0 je pata výšky trojúhelníku ABS na stranu AB. Úhel $\sphericalangle S_0SB$ je roven $\pi - \alpha$, neboť $\sphericalangle S_0SB = \pi - \frac{\sphericalangle ASB}{2} = \pi - \frac{\omega}{2} = \pi - \frac{2\alpha}{2} = \pi - \alpha$. Jelikož úhel $\sphericalangle SS_0B$ je pravý, pak úhel $\sphericalangle SBA = \frac{\pi}{2} - (\pi - \alpha) = \alpha - \frac{\pi}{2}$. A jelikož tečna z bodu B je kolmá na poloměr BS, pak $\sphericalangle ABX = \frac{\pi}{2} + (\alpha - \frac{\pi}{2}) = \alpha$.