Pomocný text k 3. sérii

Catalanova čísla

autor: *BRKOS Team*

Aby nebylo v BRKOSích sériích úplně přestudijňotextováno, budeme se snažit udělat text této série pokud možno stručný. Rychle si definujeme, co to Catalanova čísla jsou a následně si ukážeme několik příkladů struktur, které popisují. Aby text nebyl moc dlouhý, nebudeme precizně dokazovat všechna tvrzení. Přesto se na libovolnou znalost z tohoto textu ve svém řešení můžete odvolat.

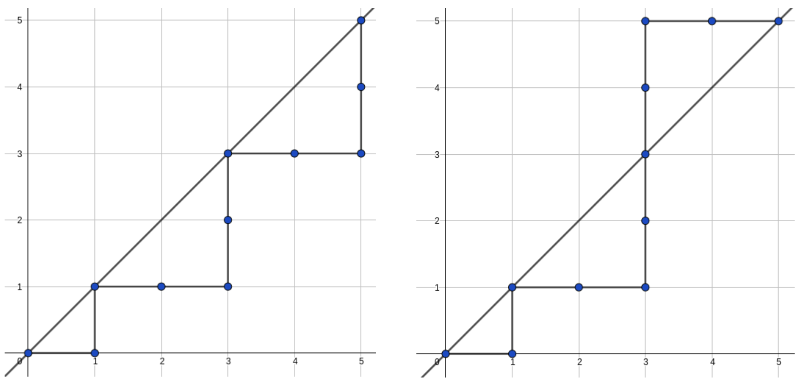
Tak tedy, co jsou to Catalanova čísla? n-té Catalanovo číslo budeme značit C_n a definujeme je jako

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

K čemu jsou čísla takového zvláštního tvaru dobrá? Značení $\binom{n}{k}$ pochází z oblasti matematiky zvané kombinatorika a značí počet možných způsobů, jak vybrat k prvků z množiny obsahující n různých objektů. Výskyt tohoto značení v definici Catalanova čísla není náhodou, a proto také Catalanova čísla mají svůj kombinatorický význam. Ve skutečnosti existuje celá řada struktur, jejichž počet popisují.

Základním příkladem jsou tzv. *Dyckovy cesty* nebo také *"cesty pod diagonálou"*. Zafixujme si přirozené číslo n a uvažme cesty v rovině z bodu $[0,0]$ do bodu $[n,n]$, které vznikly tak, že se z bodu $[0,0]$ pohybujeme v krocích. V každém kroku máme na výběr z jedné ze dvou možností: buď se pohneme o vzdálenost jedna horizontálně doprava, nebo se pohneme o vzdálenost jedna vertikálně nahoru. Tyto cesty budeme nazývat *krokové cesty.*

O krokové cestě řekneme, že je Dyckova, pokud se žádná její část nenachází nad diagonálou tvořenou body $[a,a]$. Na obrázku 1 můžete vidět příklad Dyckovy cesty (vlevo) a krokové cesty, která ovšem Dyckova není (vpravo).



Obrázek 1: Příklad cesty, která Dyckova je (vlevo) a takové, která není (vpravo).

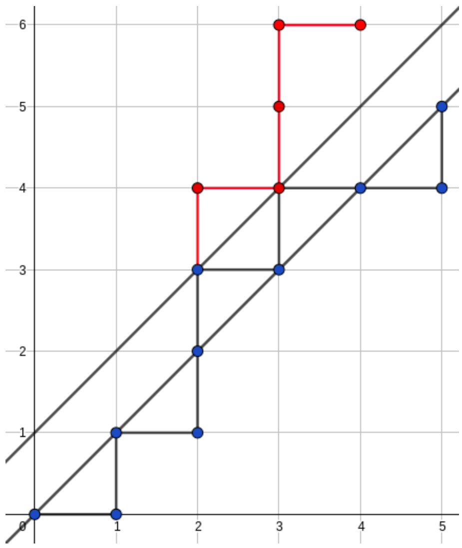
První tvrzení tohoto textu zní:

Věta. Počet Dyckových cest z bodu $[0,0]$ do bodu $[n,n]$ je C_n.

Jak se snažíme učit i vás, naše řešitele, takové tvrzení se hodí dokázat (nebo aspoň důkaz naznačit).

Důkaz. Nejdříve spočítejme, kolik existuje krokových cest z bodu $[0,0]$ do bodu $[n,n]$. Každá kroková cesta se nutně skládá z n kroků doleva a n kroků nahoru. Cestu proto můžeme reprezentovat výběrem n čísel z čísel 1 až $2n$, kde vybraná čísla značí kroky, ve kterých se hýbeme doprava. Naopak každý takový výběr jednoznačně určuje cestu z $[0,0]$ do $[n,n]$. Krokových cest je tedy přesně tolik, kolik existuje výběrů n prvků z množiny $2n$ objektů. Jak jsme si připomněli na začátku, to je rovno $\binom{2n}{n}$.

Ne všechny krokové cesty jsou ovšem Dyckovy. Z celkového počtu proto musíme odečíst počet krokových cest, které překročí diagonálu $y = x$. Zde lze využít malého triku. Nechť c je kroková cesta překračující diagonálu. Pak $\bar{c}$ označíme takovou cestu, která se do prvního překročení diagonály shoduje s c, ale následně jsou všechny kroky přesně opačné oproti c. Od prvního překročení diagonály tedy v $\bar{c}$ uděláme krok nahoru právě tehdy, když jsme v c udělali krok doprava. Pro příklad se podívejte na obrázek 2.



Obrázek 2: Konstrukce cesty do bodu $[n-1, n+1]$ (červená) z cesty, která nevede pod diagonálou.

Pro libovolnou cestu c z bodu $[0,0]$ do bodu $[n,n]$, která není Dyckova, jsme tak zkonstruovali cestu $\bar{c}$ z bodu $[0,0]$ do bodu $[n-1, n+1]$. Důležité pozorování je, že toto přiřazení lze invertovat, tj. každé cestě z $[0,0]$ do $[n-1, n+1]$ lze přiřadit nějaká cesta z $[0,0]$ do $[n,n]$, která překračuje diagonálu. Počet těchto cest se spočítá jednoduše opět pomocí kombinačního čísla. Tentokrát vybíráme z celkových $2n$ kroků $n-1$ kroků doprava, a proto je počet těchto cest $\binom{2n}{n-1}$.

Celkový počet Dyckových cest je proto

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{2n!}{n!n!} - \frac{2n!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{2n!}{n!n!(n+1)} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n.$$

BRKOS Team 2020

Další strukturou, která lze popsat pomocí Catalanových čísel jsou tzv. dobrá uzávorkování. Dobrá uzávorkování jsou takové posloupnosti levých a pravých závorek, které vzniknou konečnou aplikací následujících pravidel:

- Dvouprvková posloupnost $()$ je dobré uzávorkování.
- Pokud jsou posloupnosti A, B dobré uzávorkování, pak jejich složení za sebe AB je dobré uzávorkování.
- Pokud je posloupnost C dobré uzávorkování, pak je také posloupnost (C) dobré uzávorkování.

Například $(), ()(), (())()$ jsou dobrá uzávorkování, zatímco $)(, ())(, ())(()$ dobrá uzávorkování nejsou.

Není příliš těžké si rozmyslet, že každé Dyckově cestě lze přiřadit dobré uzávorkování a naopak. Dokáže se tak následující tvrzení.

Věta. Dobrých uzávorkování obsahujících $2n$ závorek je C_n.

S využitím následujícího vzorečku není těžké dokázat tvrzení o tzv. triangulacích pravidelných n-úhelníků. Pro libovolné nezáporné celé číslo n platí:

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}.$$

Vzoreček není těžké odvodit například s využitím předchozí věty. V následujícím tvrzení je důležité, že n-úhelník má rozlišitelné vrcholy (tj. jsou očíslovány). Například čtverec lze rozdělit na trojúhelníky dvěma různými způsoby (podle dvou diagonál), i když obě rozdělení bez očíslování vypadají stejně.

Věta. Počet způsobů, jak rozdělit pravidelný $(n+2)$-úhelník s rozlišitelnými vrcholy na n trojúhelníků, je C_n.

Se znalostí předchozí věty si můžete rozmyslet důkaz také posledního tvrzení tohoto textu. To mluví o tzv. binárních stromech, které zde z důvodu zachování kompaktnosti textu již nebudeme definovat
(viz například `https://cs.wikipedia.org/wiki/Bin%C3%A1rn%C3%AD_strom`). Jejich znalost není k řešení série určitě nutná, ale může se hodit jako alternativní pohled na některé problémy. Důkaz tvrzení má stejný princip jako předchozí důkazy. Každému stromu přiřadíme nějakou triangulaci a naopak. K nalezení takového přiřazení je dobré si všimnout, že ve stromu má většina vrcholů tři sousedy (dva syny a otce) a trojúhelník má tři hrany, která každá může v triangulaci sousedit s nejvýše jedním dalším trojúhelníkem.

Věta. Počet plných binárních stromů (každý uzel má 0 nebo 2 syny) majících $n+1$ listů je C_n.

Catalanova čísla popisují opravdu velké množství matematických struktur (v literatuře lze nalézt dokonce stovky), ale v rámci zachování kompaktnosti textu se spokojíme s předchozím výčtem. Pro více informací můžeme doporučit příkld stránku anglické wikipedie `https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number`.

BRKOS Team 2020