Studijní text: funkcionální rovnice

Tématem druhé série jsou funkcionální rovnice. Jedná se o takové rovnice, ve kterých hledáme neznámou funkci splňující zadanou rovnici. Jelikož taková neurčitá definice toho asi moc neříká, tak si hned pojďme ukázat příklad nějaké funkcionální rovnice:

Příklad 1: Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y:

$$f(x+y) + 2f(x-y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y.$$

Ač uvedená rovnice může na první pohled vypadat komplikovaně, tak si za chvíli ukážeme, že na jejím vyřešení nic složitého není.

Podobně jako v příkladu 1 vypadají všechny funkcionální rovnice – máme zadáno, že hledáme funkci se zadaným definičním oborem a oborem hodnot, přičemž pro (obvykle) všechny hodnoty z definičního oboru má platit zadaná rovnost. A jak se tedy obecně funkcionální rovnice řeší? Jsou dvě nejznámější metody – Cauchyho metoda a substituční metoda. Cauchyho metodou se zde zabývat nebudeme, ale ukážeme si, jak funguje metoda substituční. Její hlavní myšlenka je, že nejprve předpokládáme, že nějaká funkce vyhovující dané rovnici existuje a jelikož víme, že zadaná podmínka má platit pro všechny hodnoty z definičního oboru, tak musí platit i pro nějaké speciální hodnoty. My ovšem chytře dosadíme takové speciální hodnoty, které nám o funkci něco prozradí. Jak to vypadá v praxi? Ukažme si hned na příkladu 1:

Řešení příkladu 1: Předpokládejme tedy, že naše rovnice má nějaké řešení f. Jelikož f má splňovat zadanou rovnici pro všechna reálná x, y, tak speciálně musí splňovat danou rovnici pro $y = 0$. Dosaďme a dívejme se, co se bude dít:

$$\begin{aligned} f(x+0) + 2f(x-0) + f(x) + 2f(0) &= 4x + 0 \\ 4f(x) &= 4x - 2f(0) \\ f(x) &= x - \frac{f(0)}{2}. \end{aligned}$$

Ale $\frac{f(0)}{2}$ je pro naši vybranou funkci f prostě nějaká reálná konstanta (sice neznáme její hodnotu, ale jedná se o výraz naprosto nezávislý na x). Označme tedy $c = \frac{f(0)}{2}$. Potom víme, že f musí být tvaru $f(x) = x - c$. Mohlo by se zdát, že teď máme řešení a tak jsme skončili, ale pozor! Jelikož jsme na začátku předpokládali, že uvedená rovnice má řešení (což vůbec nemusí být pravda!), tak nyní musíme udělat zkoušku. Dosaďme tedy $f(x) = x - c$ do původní rovnice a sledujme, jestli dostaneme platnou rovnost:

$$\begin{aligned} (x + y - c) + 2(x - y - c) + (x - c) + 2(y - c) &= 4x + y \\ 4x + y - 6c &= 4x + y. \end{aligned}$$

To ale je platná rovnost právě tehdy, když $c = 0$. Naše rovnice má tedy jediné řešení a tím je $f(x) = x$.

BRKOS Team 2020

Uveďme si nyní dva důležité komentáře. První se týká zkoušky. Ta je sice při použití substituční metody vždy povinnou součástí řešení, ale v mnohých případech nedá žádnou převratnou informaci (prostě se dozvíme, že daná funkce splňuje požadovanou rovnost). V takových případech stačí do řešení napsat, že jste zkoušku provedli bokem na papíře a vyšla vám[1].

Druhý důležitý komentář by měl odpovídat na otázku, jak na něco takového přijít. Proč zrovna volba $y = 0$? Odpověď je bohužel spíše neuspokojivá, protože žádný obecně použitelný postup říkající, které volby jsou zaručeně dobré, neexistuje. Na druhou stranu existuje spousta osvědčených voleb, které nám často pomůžou. První obecnou radou je dosazovat takové hodnoty, které nám danou rovnici zjednoduší. Což se nám teď krásně povedlo v minulém příkladě. Volbou $y = 0$ se nám totiž najednou začaly rovnat výrazy $f(x+y), f(x-y)$ a $f(x)$. Zde je seznam některých typických voleb:

- $x = 0, y = 0, x = 1, y = 1$;
- $x = y$, $x = -y$;
- nejprve dosadíme $x = t$, pak dosadíme $x = -t$ a oba výsledky porovnáme;
- nejprve dosadíme $x = t, y = u$ a následně dosadíme $x = u, y = t$ a oba výsledky porovnáme;
- $x = f(t)$.

Těsně před tím, než skončíme, si ukažme řešení ještě jedné rovnice, které už nebude tak přímočaré, jako tomu bylo u příkladu 1:

Příklad 2: Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná x, y:

$$f(x - y^2) = f(x) - y^2.$$

Řešení: Dosazením $y = 0$ tentokrát nic zajímavého nezískáme, tak zkusme dosadit $x = 0$. Dostáváme:

$$f(-y^2) = f(0) - y^2.$$

Co nám to říká? Vidíme, že argument levé strany je vždy nekladný a naopak jakékoliv nekladné číslo můžeme vyjádřit jako $-y^2$, takže pokud označíme $c := f(0)$, tak vidíme, že pro libovolné nekladné číslo z musí f splňovat $f(z) = c + z$. Zbývá zjistit, jak se f chová na kladných hodnotách.

Předpokládejme tedy, že x je libovolné kladné číslo. Kdybychom se nyní zbavili výrazu $f(x - y^2)$ na levé straně (myslíme tím, zařídili aby nebyl závislý na x), tak hned můžeme vyjádřit ze zadaného vztahu $f(x)$ a mít rovnici vyřešenou. No ale k tomu přece můžeme použít y! Pokud bychom y zvolili tak, že bude platit $x - y^2 = 0$, tak na levé straně rovnice dostaneme $f(0)$ (tedy c), což už není výraz závislý na x. A jelikož jsme předpokládali, že x je kladné, tak můžeme zvolit $y = \sqrt{x}$ a rovnice nám přejde do tvaru:

$$\begin{aligned} f(0) &= f(x) - \left(\sqrt{x}\right)^2 \\ x + c &= f(x). \end{aligned}$$

[1] Občas se v tomto případě zachází do extrémní stručnosti, kdy napíšete něco takového: *Vyšla nám funkce $f(x) = x^2$, která je opravdu řešením.* Přičemž to, že jste udělali zkoušku je skryto v tom slovu opravdu :)

Dostáváme tedy, že f musí být tvaru $f(x) = x + c$, kde c je nějaká reálná konstanta. Zkouškou zjistíme, že všechny takovéto funkce jsou opravdu řešením naší rovnice.

Pokročilejší techniky

Na závěr si jenom proleťme různé možné pokročilejší techniky řešení funkcionálních rovnic. Každá položka ze seznamu by si zasloužila mít samostatnou úlohu, ale text by nabyl tak obřích rozměrů, že si jen řekneme, kam má smysl pokračovat.

- Užitečné bývá dokázat, že funkce má nějakou zajímavou vlastnost, které funkce mívají – například, že je injektivní, surjektivní, bijektivní, sudá, lichá, rostoucí, klesající, záporná, kladná, spojitá…

- Občas pomáhá uhádnout řešení a dosadit ho do rovnice následujícím způsobem: u příkladu 2 si všimněme, že řešením je funkce $f(x) = x$. Zadefinujme novou funkci g následovně: $g(x) = f(x) - x$ (odečítáme uhádnuté řešení). Nyní nám stačí dokázat, že funkce g je konstantní, což už je poměrně snadné. Vyzkoušejte si to na příkladu 2 sami :)

- Dosazujme takové hodnoty, aby se rovnaly naprosto odlišné výrazy! Například na mezinárodní matematické olympiádě v roce 2017 byl jeden z příkladů následující funkcionální rovnice:
  $$f(f(x)f(y)) + f(x + y) = f(xy).$$
  Přitom celé řešení začalo volbou $x = \frac{y}{y-1}$. Jak na něco takového ale přijít? No jsou to všechny takové volby, které splní, že $x + y = xy$, čímž pádem se nám odečtou výrazy $f(x + y)$ a $f(xy)$.

To je z pomocného textu všechno. Doufáme, že vás funkcionální rovnice zaujaly a s chutí se pustíte do řešení úloh v sérii!

BRKOS Team 2020