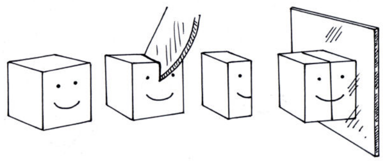
Pomocný text k 6. sérii

Zobrazení v prostoru

autor: *Matouš*

Všichni si jistě dokáží představit všední zobrazení v rovině, jako osová souměrnost, středová souměrnost, posunutí a rotace. Hlavním cílem tématu této série je jednak tato zobrazení (nebo spíše jejich prostorové analogie) definovat a jednak ukázat, že stačí jen malý krok a ke všemu, co známe z roviny, dokážeme nějakou analogii v prostoru nalézt. Přijměte tedy pozvánku do nádherného euklidovského prostoru E_3, místa je tu dost![1]



Rovinová souměrnost

Jako první zobrazení si uveďme takové, které vídáte každé ráno před zrcadlem. V prostoru je dána rovina $\alpha \in E_3$. Rovinová souměrnost podle roviny α je zobrazení $\rho_\alpha : E_3 \to E_3$ takové, že pro každé $X \in E_3$ platí:

1. $\overleftrightarrow{X\rho_\alpha(X)} \perp \alpha$
2. $|\rho_\alpha(X)\alpha| = |X\alpha|$
3. $\rho_\alpha(X) = X \Leftrightarrow X \in \alpha$ (tato podmínka říká, že zobrazení není identita)

Jak lze vidět ze třetí podmínky, samodružné body[2] jsou ty, které leží v rovině α. Dále pokud pro množinu bodů $M \subseteq E_3$ existuje rovina α taková, že $\rho_\alpha(M) = M$ (čili množina se ve zobrazení nezmění), říkáme, že je množina M *rovinově souměrná* a rovinu α označme jako *rovinu souměrnosti množiny M*.

Osová souměrnost

Toto zobrazení už má tu vlastnost, že jej lze v prostoru skutečně provést, a to otočením objektu o 180°. V prostoru je dána přímka $p \in E_3$. Osová souměrnost podle osy p je zobrazení $o_p : E_3 \to E_3$ takové, že pro každé $X \in E_3$ platí:

1. $\overleftrightarrow{Xo_p(X)} \perp p$
2. $|o_p(X)p| = |Xp|$
3. $o_p(X) = X \Leftrightarrow X \in p$

[1] Euklidovský prostor E_3 (resp. euklidovská rovina E_2) je množina bodů v prostoru (resp. v rovině), u kterých můžeme měřit úhly a vzdálenosti a ve které se veškerá geometrie odehrává.

[2] Samodružné body jsou body, které se zobrazí samy na sebe.

Zde je snad zřejmá analogie definice jak s rovinovou souměrností, tak s osovou souměrností v E_2. Rozum však velí dívat se na toto zobrazení jako na středovou souměrnost v E_2, kterou lze podobně získat jako otočení o 180°. Podobně samodružné body jsou ty, které leží na ose p. Dále opět pokud pro množinu bodů $M \subseteq E_3$ existuje přímka p taková, že $o_p(M) = M$, říkáme, že je množina M *osově souměrná* a přímku p nazveme *osa souměrnosti množiny* M.

Středová souměrnost

Logicky jsme si přiřadili prostorovou rovinovou souměrnost k plošné osové a prostorovou osovou v k plošné středové. Středová souměrnost v E_3 je však novinka. V prostoru je dán bod $B \in E_3$. Středová souměrnost se středem B je zobrazení $s_B : E_3 \to E_3$ takové, že pro každé $X \in E_3$ platí:

1. $B \in \overleftrightarrow{X s_B(X)}$
2. $|s_B(X)B| = |XB|$
3. $s_B(X) = X \Leftrightarrow X = B$

Zde je samodružný bod pouze střed B. Pokud pro množinu bodů $M \subseteq E_3$ existuje bod B takový, že $s_B(M) = M$, říkáme, že je množina M *středově souměrná* a bod B nazveme *středem souměrnosti množiny* M. Podobně jako rovinové souměrnosti ani středové nedokážeme v reálném světě nijak docílit. Její obraz je totiž také překlopený.

Rotace

V prostoru se rotace klasicky provádí kolem nějaké osy. Kdyby nám totiž někdo zadal pouze bod a úhel otočení, nevěděli bychom si rady, kam předmět otočit. Mějme tedy danou přímku $p \in E_3$ a úhel $\alpha \in (-\pi, \pi\rangle$. Rotace kolem dané přímky o daný úhel je pak zobrazení $r_{p,\alpha} : E_3 \to E_3$ takové, že pro každé $X \in E_3$ platí:

- označme ρ_X rovinu kolmou k p a procházející bodem X
- označme X_0 průsečík roviny ρ_X s přímkou p

1. $r_{p,\alpha}(X) \in \rho_X$
2. $|\overrightarrow{\sphericalangle r_{p,\alpha}(X) X_0 X}| = \alpha$
3. $|r_{p,\alpha}(X)p| = |Xp|$

Aby byla rotace funkcí (každý bod měl právě jeden obraz), je potřeba zavést tzv. „orientovaný úhel“. Ten nám ve druhé podmínce jednoduše říká, že otáčet musíme „v kladném směru pohybu“, tj. proti směru hodinových ručiček. Zde se již nezavádí žádný pojem jako „rotační souměrnost“ (objekt, který se v nějaké rotaci zobrazí sám na sebe), neboť záleží na úhlu α. Mohli bychom ale uvažovat například objekty, které se nezmění v žádné rotaci kolem nějaké přímky (např. válec nebo koule) anebo takové, které se nezmění v rotaci o nějaký úhel (pravidelný trojboký hranol, atd.)

Translace

Také označováno jako posunutí. V prostoru je dána orientovaná úsečka $\mapsto AB, A, B \in E_3$[3]. Translace o „vektor" $\mapsto AB$ je zobrazení $t_{AB} : E_3 \to E_3$ takové, že pro každé $X \in E_3$ platí:

1. $t_{AB}(X)X \parallel AB$
2. $t_{AB}(X)XBA$ je konvexní rovnoběžník

Je zřejmé, že pokud bychom chtěli nějaký (neprázdný) objekt, který se při nějaké (nenulové) translaci nezmění, tj. $M \subseteq E_3; t_{AB}(M) = M$, musel by být neomezený (nelze jej ohraničit nějakou krabicí/krychlí). S každým bodem $X \in M$ je totiž v množině M i $t_{AB}(X), t_{AB}(X)^2, \ldots, t^n_{AB}(X), \ldots$, přičemž jistě platí, že $|Xt^n_{AB}(X)| = n|AB|$.

Podobně jako lze v rovině seskládat libovolné shodné zobrazení vhodnou kombinací osových souměrností, lze i v prostoru nahradit libovolné shodné zobrazení hrstkou rovinových.

- $o_p = \rho_\alpha \circ \rho_\beta$, kde $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = p$
- $s_B = \rho_\alpha \circ \rho_\beta \circ \rho_\gamma$, kde $\alpha \perp \beta, \alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma, S \in \alpha \cap \beta \cap \gamma$
- $r_{p,\alpha} = \rho_\beta \circ \rho_\alpha$, kde $\alpha \cap \beta = p, |\sphericalangle \alpha\beta| = \frac{\alpha}{2}$
- $t_{AB} = \rho_\beta \circ \rho_\alpha$, kde $\alpha \parallel \beta, |\alpha\beta| = \frac{|\alpha\beta|}{2} \frac{\alpha}{2}$

Kromě těchto několika nádherných zobrazení existují i další, složitější zobrazování v prostoru. Můžete se potkat například se stejnolehlostí z bodu, z přímky, z roviny, kulovou inverzí, válcovou inverzí, různými typy projekcí do roviny, atd. O těch ale příště...

[3]Orientovanou úsečku získáme vyznačením jednoho krajního bodu