Pomocný text k 5. sérii

USPOŘÁDÁNÍ

autor: *Viki*

V tejto sérii si povieme niečo o usporiadaniach. Ukážeme si, čo to usporiadania sú, aké usporiadania už môžete poznať a na čo nám slúžia. Ako pomenovanie napovedá, usporiadanie je nejaký nástroj, ktorý nám dovoľuje prvky (napríklad prirodzené čísla) porovnať a zoradiť. Z hodín matematiky a bežného života napríklad poznáte usporiadanie čísel podľa veľkosti. Značíme ho symbolom „$\leq$“ a zápis „$a \leq b$“ čítame ako „a je menšie alebo rovné ako b“. Napríklad platí $1 \leq 3$ a $3 \leq 3$, ale neplatí $5 \leq 3$. Ale to už poznáte zo základnej školy. Skúsme si teda povedať niečo nové, a to, ako je usporiadanie definované formálne. Na to budeme najprv potrebovať definíciu relácie na množine.

Definícia 1 (Binárna relácia na množine)**.** Binárna relácia R na množine A je množina dvojíc prvkov z A. Formálne píšeme $R \subseteq A \times A$, kde $\times$ je kartézsky súčin dvoch množín.

Neformálne, binárna relácia na množine určuje vzťah medzi prvkami danej množiny. Potom ak pre prvky a, b z A platí $(a, b) \in R$, hovoríme, že a je v relácii R s prvkom b. Binárna znamená, že nás zaujíma vzťah dvoch prvkov, teda uvažujeme dvojice. Existujú aj relácie medzi viacerými prvkami, tie nás však túto sériu zaujímať nebudú.

Príklad 1. Majme množinu $A = \{1, 2, 3\}$. Potom množina obsahujúca všetky dvojice prvkov z A je $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$. Množina $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$ je jedna z mnohých binárnych relácií na množine A.

Reláciu môžeme často značiť aj pomocou vhodného symbolu, ako napríklad usporiadanie $\leq$ alebo často používaný symbol $\sim$. Potom môžeme príslušnosť do relácie $\sim$ zapísať ako $(a, b) \in \sim$ alebo $a \sim b$. V literatúre sa môžete stretnúť s oboma zápismi, my budeme ďalej v texte používať zápis $a \sim b$[1]. Zároveň budeme ďalej v texte pod každou reláciou myslieť práve binárnu reláciu na množine.

Definícia 2 (Usporiadanie)**.** Usporiadanie množiny A je taká relácia $\sim$ na množine A, kde pre všetky možné prvky a, b, c z množiny A platí:

$$\begin{aligned} a &\sim a, && \text{(reflexivita)} \\ \text{ak platí } a \sim b \text{ a zároveň } b \sim a\text{, potom } a &= b, && \text{(antisymetria)} \\ \text{ak platí } a \sim b \text{ a zároveň } b \sim c\text{, potom } a &\sim c. && \text{(tranzitivita)} \end{aligned}$$

Usporiadanú množinu často zapisujeme ako dvojicu $(A, \sim)$, kde A je dotyčná množina a $\sim$ jej usporiadanie. Ak pre dva prvky a, b z A platí $a \sim b$ alebo $b \sim a$, hovoríme, že prvky a a b sú porovnateľné. Relácia usporiadania musí spĺňať tri vlastnosti, ktorých význam si vysvetlíme na usporiadaní čísel $\leq$.

[1] Taký zápis sa nazýva infixový.

reflexivita Každý prvok je v relácii sám so sebou, teda pre každé číslo platí $a \leq a$.

antisymetria Neexistujú dva rôzne prvky, kde by bol prvý väčší alebo rovný ako ten druhý, a zároveň druhý väčší alebo rovný ako ten prvý. Teda zjavne pre každú dvojicu čísel a, b platí, že ak $a \leq b$ a $b \leq a$, tak nutne $a = b$.

tranzitivita Ak je jeden prvok rovný menší alebo ako druhý a druhý menší alebo rovný ako tretí, tak aj prvý je menší alebo rovný ako tretí. Zjavne, pre ľubovoľné čísla a, b, c platí, že ak $a \leq b$ a $b \leq c$, tak $a \leq c$.

Uvedené usporiadanie $\leq$ má jednu dobrú vlastnosť, a to, že je lineárne: teda všetky dvojice prvkov sú porovnateľné. Pre ľubovoľné prirodzené a a b platí aspoň jedno z $a \leq b$ alebo $b \leq a$. To však nemusí obecne platiť pre všetky usporiadania. Preto si v ďalšom príklade ukážeme jedno usporiadanie, ktoré by vám mohlo byť blízke, ale nie je lineárne: vieme nájsť také dvojice prvkov, pre ktoré nevieme povedať, ktorý z prvkov je väčší.

Príklad 2. Definujme reláciu $|$ na prirodzených číslach[2] $\mathbb{N}$ nasledovne:

$$a \mid b \text{ práve vtedy, keď } a \text{ delí } b \text{ bez zvyšku.}$$

Ukážeme, že $|$ je relácia usporiadania. Na to, aby sme to dokázali, musíme dokázať platnosť všetkých troch vlastností. Pripomeňme si, že a delí b bez zvyšku práve vtedy, keď existuje prirodzené číslo k také, že $b = ka$.

reflexivita Každé číslo delí samé seba, stačí zvoliť $k = 1$. Preto pre každé a platí $a \mid a$.

antisymetria Predpokladáme pre ľubovoľné a a b, že platí $a \mid b$ a zároveň $b \mid a$. Potom z definície $|$ plynie, že existujú také prirodzené k a l, že $b = ka$ a $a = lb$. Dosadíme druhú rovnosť do prvej a dostaneme $a = lka$. Jediné riešenie tejto rovnice pre prirodzené čísla a ľubovoľné prirodzené a je, ak dosadíme $k = l = 1$. Dosadením do pôvodných rovností dostaneme $a = b$, čo sme chceli.

tranzitivita Predpokladáme pre ľubovoľné a, b a c, že platí $a \mid b$ a $b \mid c$. Potom z definície $|$ plynie, že existujú také prirodzené k a l, že $b = ka$ a $c = lb$. Dosadením prvej rovnosti dostaneme $c = lka$. Zjavne lk je prirodzené číslo, preto a delí c a z definície $|$ vyplýva $a \mid c$.

Deliteľnosť nám, rovnako ako hodnota čísla, dokáže čísla nejako usporiadať. Nájdeme však dvojice, napríklad 5 a 13, kde neplatí ani $5 \mid 13$ ani $13 \mid 5$. Ale ako sme ukázali, relácia vyhovuje definícii usporiadania.

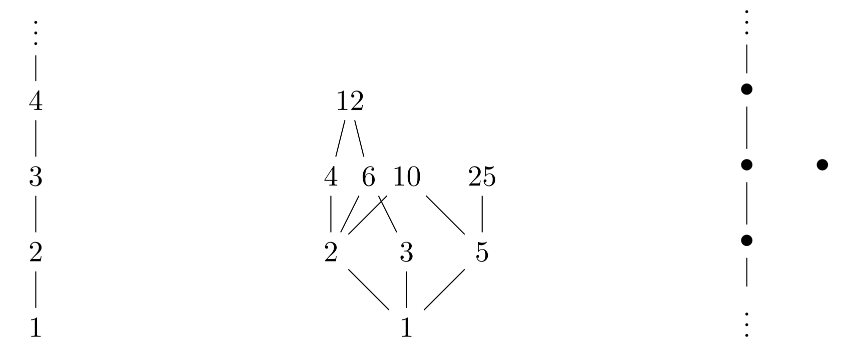
Ďalším prirodzený príklad na usporiadanie je usporiadanie množín podľa inklúzie $\subseteq$. Teda množina A je menšia ako množina B, pokiaľ A je podmnožinou B. Tento fakt píšeme ako $A \subseteq B$. Dôkaz, že relácia $\subseteq$ spĺňa všetky tri požadované vlastnosti, si môžete skúsiť napísať sami.

Hasseov diagram

Vhodným nástrojom na vizualizáciu usporiadania prvkov je takzvaný Hasseov diagram. Nebudeme ho teraz definovať formálne, iba intuitívne popíšeme, čo zobrazuje a ukážeme si nejaké príklady.

[2] Takže na číslach 1, 2, 3, 4 ...

Hasseov diagram vizuálne znázorňuje usporiadanie prvkov. Z menších prvkov ide dohora čiara k väčším prvkom. Ak z prvku a ide čiara dohora k prvku b a zároveň z b ide čiara dohora k prvku c, tak platí, že a je menšie ako b, b je menšie ako c, a aj a je menšie ako c. Čiaru z a do c už nekreslíme. Často prvky vykresľujeme v poschodiach, ale to nutne neznamená, že všetky prvky na nižšom poschodí sú menšie ako prvky na poschodí vyššom.



(a) (b) (c)

Ukážeme si jednoduché príklady. Hasseov diagram (a) zobrazuje usporiadanie prirodzených čísel podľa veľkosti, teda relácie $\leq$. Najmenšie číslo je 1, takže je pod všetkými ostatnými. Vedie však z neho čiara iba do 2. Vďaka vlastnosti tranzivity vieme, že 1 je menšie od všetkých čísel, od ktorých je aj 2 menšie. Preto zvyšné čiary, napríklad z 1 do 3, nie sú potrebné. Keďže prirodzených čísel je nekonečne veľa, nevieme v diagrame zakresliť všetky. Nekonečný rastúci reťazec značíme pomocou troch bodiek.

Diagram (b) znázorňuje usporiadanie množiny čísel $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 25\}$ podľa relácie deliteľnosti, teda vyššie definovanej relácie $|$. Na obrázku vidno nelinearitu usporiadania. Zároveň ukazuje, že prvky na rovnakom poschodí, napríklad 2, 3, 5, sú neporovnateľné. Žiadne z nich nedelí zvyšné dve. Rovnako si všimnite, že aj keď je napríklad číslo 12 v poschodí nad 10, neplatí, že by 10 bolo podľa deliteľnosti menšie ako 12. Takže prvky nemôžeme porovnávať na základe poschodia, v ktorom sú. Môžeme ale povedať, že 1 je menšie ako všetky ostatné prvky, alebo že 3 je menšie ako 12.[3]

Obrázok (c) znázorňuje, že diagram môže mať viacero častí, ktoré nemusia byť prepojené, ale stále popisujú jedno usporiadanie. Môžete si to predstaviť ako usporiadanie celý čísel podľa $\leq$ a k tomu napríklad prvok zemiak, ktorý je porovnateľný iba sám so sebou. Keďže relácie sú iba množiny dvojíc, usporiadanie, ktoré je znázornené na diagrame, môžeme matematicky zapísať ako $\leq \cup \{(\mathsf{zemiak}, \mathsf{zemiak})\}$.

Význačné prvky usporiadania

Už z obrázkov tušíte, že existuje celá kopa usporiadaní, ktoré môžu mať rôzne vlastnosti. Preto potrebujeme vhodné nástroje, ktoré nám pomôžu tieto vlastnosti popísať. Jedny z nástrojov sú význačné prvky usporiadania, z ktorých si hneď tie základné predstavíme.

Definícia 3 (Najmenší prvok usporiadania). Prvok $n \in A$ je najmenší prvok usporiadania $\sim$ na množine A práve vtedy keď je menší alebo rovný ako všetky ostatné. Formálne, pre všetky prvky a z A musí platiť $n \sim a$.

Napríklad, najmenší prvok usporiadania prirodzených čísel podľa $\leq$ je číslo 1. Poznáme

[3] Vo voľnej chvíli si môžete skúsiť dokresliť, kde by boli ostatné prirodzené čísla. Čím je tvorené druhé poschodie diagramu? Kam by ste zakreslili číslo 0?

to aj z obrázku: na (a) je 1 pod všetkými ostatnými. Rovnako vidíme na obrázku (b), že 1 delí všetky ostatné čísla, teda je podľa usporiadania deliteľnosti najmenšie. Naopak, usporiadanie podľa veľkosti $\leq$ na celý číslach nemá najmenší prvok. Pre každé celé číslo vieme nájsť také, ktoré nie je menšie.

Definícia 4 (Najvačší prvok usporiadania)**.** Prvok $n \in A$ je najväčší prvok usporiadania $\sim$ na množine A práve vtedy keď je väčší alebo rovný ako všetky ostatné. Formálne, pre všetky prvky a z A musí platiť $a \sim n$.

Najväčší prvok usporiadania musí byť v Hasseovom diagrame nad všetkými ostatnými. Pozor, nestačí, že je na vyššom poschodí! Preto žiadne z usporiadaní (a), (b), (c) nemá najväčší prvok. Do (a) by sme potrebovali pridať najväčšie prirodzené číslo, ktoré neexistuje. Do (b) by sme museli pridať číslo, ktoré je deliteľné všetkými v množine, napríklad 180.

Je dôležité si uvedomiť, že nemôže existovať viac ako jeden najmenší prvok, ani viac ako jeden najväčší prvok. Ako sme si však ukázali na príkladoch, nemusí existovať ani jeden.

Ďalšie dva pojmy túto podmienku zmierňujú. Nebudeme vynucovať, aby prvok bol pod všetkými, ale bude stačiť, aby nič nebolo pod ním.

Definícia 5 (Minimálne prvky usporiadania)**.** Prvok $n \in A$ je minimálny prvok usporiadania $\sim$ na množine A práve vtedy keď neexistuje prvok v A, ktorý je od neho menší. Formálne, neexistuje také a v A okrem n, pre ktoré platí $a \sim n$.

Vždy platí, že najmenší prvok je aj minimálny. Preto 1 je v prípade (a) aj (b) jediným minimálnym prvkom. V usporiadaní (c) neexistuje najmenší prvok, ale existuje minimálny. Je to ten osamotený prvok napravo, z ktorého dolu nevedie žiadna čiara.

Definícia 6 (Maximálne prvok usporiadania)**.** Prvok $n \in A$ je maximálny prvok usporiadania R na množine A práve vtedy keď neexistuje prvok v A, ktorý je od neho väčší. Formálne, neexistuje také a v A okrem n, pre ktoré platí $n \sim a$.

Symetricky ako pre minimálny prvok, pre maximálny prvok stačí, aby nebolo nič nad ním. V (a) žiaden taký prvok neexistuje, lebo vždy vieme nájsť väčšie prirodzené číslo. V (b) však takých prvok existuje niekoľko, konkrétne 10, 12 a 25. Pre tieto tri čísla neexistuje v diagrame také číslo, ktoré by nimi bolo deliteľné. Takže narozdiel od najmenšieho a najväčšieho prvku, minimálnych a maximálnych môže byť viac. V (c) si všimnite, že osamotený prvok je zároveň minimálny aj maximálny prvok: nie je nič nad ním ani pod ním.

Ďalšie prvky, o ktorých si povieme, sú iné tým, že nie sú definované pre usporiadanie a množinu, ale aj pre každú podmnožinu usporiadanej množiny.

Definícia 7 (Dolná závora prvkov usporiadania)**.** Nech $B \subseteq A$. Potom prvok $n \in A$ je dolná závora množiny B s usporiadaním $\sim$ práve vtedy, keď n je menšie alebo rovné ako všetky prvky z B. Formálne, pre každý prvok b z B platí $n \sim b$.

Neformálne, dolná závora množiny je taký prvok, ktorý je pod všetkými prvkami množiny. Dolných závor môže existovať viac ale nemusí existovať žiadna. Napríklad, pre podmnožinu $\{4, 6\}$ v príklade (b) sú dolnými závorami 1 a 2. Sú to teda prvky, ktoré delia všetky prvky vybranej podmnožiny. Pre množinu $\{5, 10, 25\}$ sú dolnými závorami 1 a 5. Takže dolnou závorou podmnožiny môže byť aj prvok z danej podmnožiny. Tiež si všimnite, že najmenší prvok je dolnou závorou každej podmnožiny.

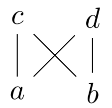
Definícia 8 (Horná závora prvkov usporiadania). Nech $B \subseteq A$. Potom prvok $n \in A$ je horná závora množiny B s usporiadaním $\sim$ práve vtedy, keď n je väčšie alebo rovné ako všetky prvky z B. Formálne, pre každý prvok b z B platí $b \sim n$.

Symetricky ako pre dolnú závoru, horná závora množiny je prvok, ktorý je nad všetkými prvkami podmnožiny. Príklady si opäť ukážeme na obrázku (b). Podmnožina $\{2, 3\}$ má horné závory 6 a 12, teda čísla, ktoré sú deliteľné všetkými číslami z podmnožiny. Podmnožina $\{4, 6, 10\}$ nemá žiadnu hornú závoru. V usporiadaní nie je číslo, ktoré by bolo deliteľné týmito číslami. Opäť, najväčší prvok usporiadania je hornou závorou každej množiny. Horných závor môže byť viac, ale nemusí vždy existovať.

Definícia 9 (Infimum prvkov usporiadania). Infimum je najväčšia dolná závora.

Definícia 10 (Supremum prvkov usporiadania). Supremum je najmenšia horná závora.

Keďže ohraničení množiny môžeme nájsť viac, často nás zaujíma iba to najtesnejšie ohraničenie. Tým sú práve infimum, ako najtesnejšie dolné ohraničenie, a supremum, teda najtesnejšie horné ohraničenie. Tesnosť dosiahneme práve tým, že hľadáme najväčšie dolné ohraničenie a najmenšie horné ohraničenie. To nemusí vždy existovať.



Uvážme usporiadanie na množine $\{a, b, c, d\}$ určené Hasseovým diagramom na obrázku. Potom podmnožina $\{a, b\}$ má dve horné závory: prvky c a d. Z týchto prvkov však nevieme vybrať ten najmenší (ani jeden nie je menší ako ten druhý), preto pre danú podmnožinu neexistuje supremum. Keďže podmnožinu nemá žiadnu dolnú závoru, neexistuje ani infimum. Príklad ilustruje, že existencie hornej závory nezaručuje existenciu suprema. Symetricky, pre podmnožinu $\{c, d\}$ existujú dolné závory, ale neexistuje infimum.

Zhrnutie

Veríme, že ste sa v texte dozvedeli niečo nové. To najdôležitejšie, čo by ste si mali odniesť, je definícia usporiadania a pochopenie vlastností, ktoré musí usporiadanie spĺňať: reflexivita, antisymetria a tranzitivita. Pri riešení úloh tejto série sa pokúste využívať pre ilustráciu Hasseove diagramy [4]. Zapamätajte si rozdiel medzi minimálny a najmenším prvkom, maximálnym a najväčším: ten naj môže byť iba jeden! Dolné a horné závory určujú ohraničenie podmnožiny usporiadania, ktorými môže byť aj prvok danej podmnožiny. Infimum a supremum určujú najtesnejšie dolné a horné ohraničenie, ktoré však nemusí existovať.

[4] v LaTeXvám na to poslúži balíček `tikz`