Pomocný text k 3. sérii

Racionální & Iracionální čísla

autor: *Martin*

Úvod

Protože o racionálních číslech jste toho jistě již mnoho slyšeli ve škole, rozhodli jsme se vám v této sérii ukázat spíš několik zajímavostí. Možná se dozvíte věci, které již znáte, ale vlastně si nejste jisti, proč fungují, možná se dovíte i něco úplně nového. Začněme ovšem pěkně od začátku. Co to vůbec taková racionální čísla jsou? Jedná se o množinu všech čísel, která lze zapsat zlomkem. Formálně bychom řekli:

Definice. Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je množina právě takových čísel $q \in \mathbb{R}$, pro která existují čísla $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ taková, že platí $q = \frac{a}{b}$. Pak číslo a nazýváme čitatelem, zatímco číslo b jmenovatelem zlomku reprezentujícího q.

Všimněte si, že v definici říkáme, že b patří do $\mathbb{N}$. Samozřejmě všichni dobře víte, že zlomek může mít i záporný jmenovatel. Takový zlomek ovšem můžeme převést do tvaru, kde bude jmenovatel kladný rozšíření zlomkem $\frac{-1}{-1}$. Podmínka $b \in \mathbb{N}$ proto především zakazuje, aby byl jmenovatel nulový.

Když to nechci ve zlomku

Často se ovšem setkáváme s racionálními čísly v jiném tvaru – v desítkové soustavě. Již ze základní školy víte, že racionální čísla lze zapsat v desítkové soustavě pomocí desetinné čárky a desetinného rozvoje za ní. Jak ovšem přesně mohou racionální čísla vypadat? Jedná se právě o ta čísla, která mají konečný desetinný rozvoj, nebo se jejich desetinný rozvoj periodicky opakuje. Ukažme si aspoň jednu implikaci, tedy že každé racionální číslo je v dekadickém zápisu periodické. K důkazu nám poslouží starý známy algoritmus pro dělení ze základní školy.

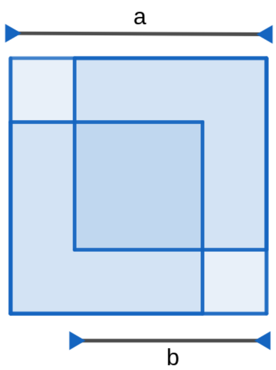
Důkaz. Nechť $q \in \mathbb{Q}$ je libovolné racionální číslo. Pak z definice racionálního čísla existují čísla $a \in \mathbb{Z}$ a $b \in \mathbb{N}$ taková, že $q = \frac{a}{b}$. Nyní proveďme standardní algoritmus dělení. Mohou nastat dvě situace. Číslo a je dělitelné číslem b a potom lze q zapsat bez desetinného rozvoje. V opačném případě pokračujeme v dělení. Pokud při algoritmu překročíme desetinnou čárku, sledujeme zbytky, které postupně při dělení získáváme. Každý zbytek po dělení číslem b nutě leží v intervalu $[0, b-1]$, a je jich proto jen konečný počet. Podle

Dirichletova principu proto po nejvýše $b + 1$ krocích nastane situace, kdy některý zbytek r získáme podruhé. Je zřejmé, že od tohoto okamžiku se bude algoritmus dělení opakovat a perioda desetinného zápisu je proto rovna číslicím, které jsme dostali mezi prvním a druhým výskytem čísla r. Každé racionální číslo má proto v desetinném zápise periodu (ta ovšem může být i nulová).

Vtip. Víte jaký je rozdíl mezi trpaslíkem a reálným číslem?
– Reálné číslo s periodou je racionální.
(Z důvodů korektnosti jsme v tomto vtipu provedli substituci [žena := trpaslík]).

Bláznivá čísla

Kromě racionálních čísel se v matematice můžeme bavit o takzvaných číslech iracionálních. Jedná se o všechna reálná čísla, která nejsou racionální. Tato čísla proto nelze zapsat jako podíl dvou celých čísel a zároveň je jejich desetinný rozvoj nekonečný a neperiodický. Příkladem takových čísel jsou například čísla π, e nebo $\sqrt{2}$. Ukažme si netradiční důkaz tvrzení, že číslo $\sqrt{2}$ je skutečně iracionální.



Důkaz. Jak jsme se naučili v minulé sérii, důkaz povedeme sporem. Předpokládejme tedy, že existují čísla $a, b \in \mathbb{N}$ taková, že $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ a zároveň jsou nejmenší s touto vlastností. Pak platí:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \qquad / \ ^2$$
$$2 = \frac{a^2}{b^2} \qquad / \cdot b^2$$
$$2b^2 = a^2$$
$$b^2 + b^2 = a^2$$

Z geometrické interpretace je patrné, že pokud má platit rovnost $b^2 + b^2 = a^2$ musí se rovnat obsahy čtverce, který vznikl jako průnik čtverců s hranou b a čtverců, které jsou rozdílem čtverce s hranou a a čtverců s hranou b. Zároveň délky hran těchto čtverců jsou po řadě $c = 2b - a$ a $d = a - b$, což jsou jistě celá čísla. Našli jsme tak čísla c, d, která jsou menší než čísla a, b a platí pro ně $2d^2 = c^2$, což je spor.

Přestože iracionálních čísel je mnohem víc než čísel racionálních, většinu z nich nejsme schopni vzhledem k jejich podstatě rozumně popsat (možná to má něco společného s tím, že je jejich desetinný zápis nekonečný). To nám ovšem nebrání se o některých z nich bavit aniž bychom věděli, jak vypadají. Občas dokonce ani z jistotou nevíme, jestli dané číslo iracionální je, nebo není. Dovolte nám se s vámi rozloučit posledním, doufáme zajímavým důkazem. Ukažme si, že existují racionální čísla $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ taková, že $a^b \in \mathbb{Q}$.

Důkaz. Uvažujme čísla $p = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ a $q = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$. V případě, že p je racionální číslo zvolíme $a = b = \sqrt{2}$. Takto zvolená a, b jsou přesně hledaná iracionální čísla. V případě, že p je iracionální ovšem platí $q = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$. Pokud p je iracionální, je číslo q racionální a zároveň lze zapsat jakou iracionální číslo umocněné na jiné iracionální číslo. V tomto případě zvolíme $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ a $b = \sqrt{2}$. Tím je tvrzení dokázáno.

Všimněte si, že jsme v důkazu skutečně našli hledanou dvojici čísel a, b, i když nejsme ani v nejmenším schopni dokázat, jestli číslo $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ skutečně iracionální je či není.

Závěr

Doufáme, že jste si v textu našli něco nového, naučili se nový důkaz nebo si odnesli hodnotnou myšlenku. Děkujeme, že jste se v pročítání textu dostali až sem a přejeme hodně štěstí při řešení další série.

BRKOS Team 2018