Pomocný text k 6. sérii

Diofantické rovnice

autor: *Minh*

Milí řešitelé,

tématem poslední série letošního ročníku jsou rovnice s celočíselným řešením. Již ve třetím století našeho letopočtu se jimi zabýval řecký matematik Diofantos, údajně si jednu takovou rovnici nechal vytesat na náhrobek. Na jeho počest se rovnicím řešeným v oboru celých čísel říká *diofantické*. Diofantické rovnice mají i praktické využití, vždyť v každodenním životě často počítáme s přirozenými nebo celými čísly.

Bohužel neexistuje žádný obecný postup řešení diofantických rovnic, a proto si musíme pomoci dobrými nápady a šikovnými triky. V tomto textu najdete přehled základních metod jak si s těmito rovnicemi poradit.

Základní myšlenky

Každé celé číslo je zároveň číslem reálným, a proto je množina řešení rovnice v $\mathbb{Z}$ podmnožinou řešení téže rovnice v $\mathbb{R}$. Při hledání řešení rovnice využíváme vlastností celých čísel. Jsou to například: dělitelnost; to, že v omezeném intervalu leží vždy konečně mnoho celých čísel; jednoznačný rozklad přirozených čísel na prvočinitele; to, že každá neprázdná množina přirozených čísel má nejmenší prvek.

Dělitelnost

Jestliže se výrazy na obou stranách rovnice mají rovnat, musí také dávat **stejné zbytky po dělení každým přirozeným číslem**.

Příklad 1.1 *Řešte v celých číslech rovnici* $x^2 - x = 101$.

Řešení Pravá strana je lichá, levou stranu lze však rozložit na $x(x-1)$, což je součin dvou po sobě jdoucích čísel, a tedy sudé číslo. Rovnice proto nemá žádné celočíselné řešení

Příklad 1.2 *Řešte v celých číslech rovnici* $x^2 = 1025$.

Řešení Pravá strana dává po dělení 3 zbytek 2. Tedy $3 \nmid x$, jinak by levá strana dávala po dělení 3 zbytek 0. Pak $x = 3k \pm 1, k \in \mathbb{Z}$ a $x^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$, tedy levá strana nikdy nebude mít stejný zbytek po dělení 3 jako pravá strana. Rovnice proto nemá žádné celočíselné řešení.

BRKOS Team 2018

Dělitelnosti lze v některých případech využít nejen k důkazu neexistence řešení, ale také ke skutečnému nalezení tvaru všech čísel, která rovnici splňují. Ukažme si druh rovnic, které můžeme dělitelností řešit vždy.

Lineární diofantické rovnice

Jsou to rovnice tvaru $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n = b$, kde koeficienty na levé straně jsou nenulová celá čísla. Největší společný dělitel koeficientů na levé straně si označíme d. Levá strana je dělitelná d, a proto i b by mělo být dělitelné d, v opačném případě nemá rovnice řešení. Obě strany rovnice můžeme proto vydělit d a získáme rovnici $a'_1x_1 + a'_2x_2 + ... + a'_nx_n = b$, ve které jsou koeficienty na levé straně nesoudělné. Ukažme si, jak lze takovou rovnici řešit.

Příklad 1.3 *Řešte v celých číslech* $5x + 7y = 8$.

Řešení Pravá strana dává po dělení 5 zbytek 3. Levá strana má po dělení 5 zbytek stejný jako výraz $2y$. Vyzkoušíme y přes všechny zbytky po dělení 5: $y = 5t + q, t \in \mathbb{Z}, q \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Zjistíme, že stejný zbytek po dělení 5 jako na pravé straně dostaneme, pouze když $y = 5t + 4, t \in \mathbb{Z}$. Dosadíme do rovnice:

$$5x + 7(5t + 4) = 8$$

$$5x + 35t + 28 = 8$$

$$5x = -35t - 20$$

$$x = -7t - 4$$

Rovnici vyhoví právě čísla $x = -7t - 4, y = 5t + 4$, kde t je celé. Množina všech řešení je tedy $\{(5t + 4, -7t - 4)|t \in \mathbb{Z}\}$.

Rovnice lineární v některém členu

Podíváme se, jaký zbytek dávají levá a pravá strana po vydělení koeficientem a u lineárního člene. Do zbylých členů dosazujeme různé zbytky po dělení a. K tomuto postupu nás, mimo jiné, vede fakt, že kvadratických zbytků bývá méně než zbytkových tříd. To znamená, že rovnice $x^2 = a$, kde si celé číslo a můžeme zapsat do tvaru $a = mt + q, q < m, m, t, q \in \mathbb{Z}$ většinou pro **některé zbytky** q **nemá řešení**. Například nenajdeme žádné celé číslo, jehož druhá mocnina by po dělení 4 dávala zbytek 3.

Příklad 1.4 *Řešte v celých číslech* $7x^2 + 6y = 75$.

Řešení Pravá strana dává po dělení 6 zbytek 3, levá strana dává po dělení 6 stejný zbytek jako výraz x^2. Zkusíme za x dosadit postupně všechny výrazy $6t + q, t \in \mathbb{Z}, q \in \{1, 3, 5\}$ (druhá mocnina sudého čísla je totiž taky sudá a po dělení 6 by dávala zbytek 2, 4 nebo 0) a hledat, kdy bude x^2 mít po dělení 6 zbytek 3. Vyhoví pouze $x = 6t + 3$, což dosadíme do původní rovnice.

$$7(6t + 3)^2 + 6y = 75$$

$$7(36t^2 + 36t + 9) + 6y = 75$$

$$7 \cdot 36t^2 + 7 \cdot 36t + 63 + 6y = 75$$

$$6y = 12 - 7 \cdot 36t^2 - 7 \cdot 36t$$
$$y = 2 - 42t^2 - 42t$$

Množina všech řešení rovnice je $\{(6t + 3, 2 - 42t^2 - 42t) | t \in \mathbb{Z}.\}$

Kdyby nelineárních členů bylo více, zkusíme do rovnice dosadit všechny možné variace zbytků těchto členů po dělení koeficientem u lineárního člene a zjistit, které varianty by mohly být řešením rovnice.

Nerovnosti

Mezi každými dvěma reálnými čísly a, b leží vždy pouze **konečně mnoho celých čísel**. Jestliže najdeme horní a dolní mez, mezi kterými se musí neznámá nacházet, můžeme rovnici řešit vyzkoušením všech možností.

Příklad 2.1 *Řešte v celých číslech* $6x^2 + 5y^2 = 74$.

Řešení $5y^2 \geq 0 \Rightarrow 74 \geq 6x^2 \Rightarrow \frac{37}{3} \geq x^2 \geq 0$, tedy $x^2 \in \{0, 1, 4, 9\}$, $x \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$. Postupně zkusíme všechny možnosti dosadit do rovnice, a zjistíme, že $x^2 = 0, 1$ nebo 4 není řešením rovnice, protože y by nebylo celočíselné. Tedy $x = \pm 3, y = \pm 2$. Množina řešení je $\{(3, 2), (3, -2), (-3, 2), (-3, -2)\}$.

Následující příklad ukazuje šikovný trik, který lze použít na rovnice, ve kterých se neznámé vyskytují symetricky.

Příklad 2.2 *Řešte v celých číslech* $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

Řešení Neznámé x, y jsou v rovnici zastoupeny symetricky, proto můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x^2 \leq y^2$. Z toho vyplývá, že také $xy \leq y^2$, a tedy máme

$$x^2y^2 = x^2 + xy + y^2 \leq y^2 + y^2 + y^2 = 3y^2.$$

Proto $x^2 \leq 3$, nebo $y^2 = 0$. Pro $y = 0$ je i $x = 0$, pro $x = 1$ je $y = -1$ a $x = -1$, je $y = 1$. Množina řešení je $\{(0, 0), (1, -1), (-1, 1)\}$.

Rozklad

V mnoha případech je výhodné si rovnici upravit tak, aby některá ze stran byla ve tvaru součinu. Zejména nám to pomůže, jestliže na straně druhé zůstane celé číslo, které nemá mnoho dělitelů.

Příklad 3.1 *Řešte v celých číslech* $y^3 - x^3 = 7$.

Řešení Rozložíme si levou stranu rovnice pomocí vzorce:

$$(y-x)(y^2+xy+x^2)=7$$

Pravá strana je kladná a pomocí úpravy na čtverec zjistíme, že i pravá závorka na levé straně je vždy kladná, proto musí být kladné i $y-x$. Číslo 7 můžeme rozložit na součin dvou kladných čísel pouze takto $7=1\cdot 7=7\cdot 1$

1. $y-x=1, y^2+yx+x^2=7$. Vyjádřením y z první rovnice a dosazením do druhé dostaneme $x^2+x-2=0$. To dává $x=-2, y=-1$ a $x=1, y=2$.
2. $y-x=7, y^2+yx+x^2=1$. Stejným postupem nyní dostaneme rovnici $x^2+7x+16=0$, která však nemá žádné řešení ani v reálných číslech.

Množina řešení je $\{(-2,-1),(1,2)\}$.

Problém často bývá rozklad najít, často nám pomohou vhodné vzorečky a hraní si s vytýkáním.

Zmenšování ad absurdum

Tato metoda se používá k důkazu neexistence (dalších) řešení diofantické rovnice. Pomyslná řešení si charakterizujeme přirozeným číslem, např. největším společným dělitelem neznámých, součtem druhým mocnin neznámých, atd. Jestliže je množina (dalších) řešení neprázdná, můžeme z ní vybrat nějaké řešení **s nejmenším charakterizujícím číslem**. Kdybychom však dokázali, že s každým řešením nalezneme **jiné řešení**, které má **menší** charakterizující číslo, došli bychom ke sporu, a tedy množina (dalších) řešení rovnice by musela být prázdná. Ukažme si to na konkrétním příkladu.

Příklad 4.1 *Řešte v oboru celých čísel:* $x^3+2y^3+4z^3-6xyz=0$

Řešení Jedním řešením je $x=y=z=0$, dokažme, že jiné řešení rovnice nemá. Za charakterizující číslo pro trojici (x,y,z) označme $c=x^2+y^2+z^2$ a uvažme takovou trojici vyhovující rovnici, pro kterou je $c>0$. Z rovnice plyne, že x je sudé, tedy $x=2x_1$, dosadíme a vydělíme 2, čímž zjistíme, že i y musí být sudé, tedy tvaru $y=2y_1$, po dosazení a úpravě získáme, že také $z=2z_1$. Po dosazení a úpravě však dostaneme výraz úplně stejného tvaru:

$$x_1{}^3+2y_1{}^3+4z_1{}^3-6x_1y_1z_1=0$$

Přitom novou trojici charakterizuje číslo $\frac{1}{4}c<c$, tedy menší číslo než původní trojici. Rovnice má tedy pouze jediné řešení $x=y=z=0$.

Nyní se můžete s chutí pustit do úloh, vždyť nejlepší metodou řešení matematických problémů je něco dělat. Přejeme hodně zdaru!