Pomocný text

Šachovnice

Úvod

Milý řešitelé. Tématem 5. série jsou šachovnice. A protože všichni víme, co to taková šachovnice je, tak nemá cenu psát běžný studijní text plný definic a vět. V tomto textu najdete několik vyřešených příkladů, které se tématu týkají a některé z nich vám přímo pomohou řešit některé tematické příklady, jiné si stojí zato přečíst čistě ze zajímavosti. Tak příjemné počtení.

Příklady

Hned první problém používá snad nejběžnější techniku důkazu na šachovnici, takzvané obarvování. Principem je nějak vhodně šachovnici obarvit a pak ukázat nějakou disproporci.

Příklad 5.1. Dokažte, že pomocí domin (obdélníčků 1×2 dílky) nelze vydláždit čtvercovou šachovnici $(4n+2)\times(4n+2)$ pro žádné nezáporné n tak, aby počet vertikálně umístěných domin byl stejný jako počet horizontálně umístěných domin.

Tedy například šachovnici 2×2 lze sice vydláždit 2 horizontálními dominy (prostě je dáme pod sebe), ale ne jedním horizontálním a jedním vertikálním.

Důkaz. Obarvíme šachovnici černou a bílou barvou tak, že černě obarvíme liché sloupečky (tedy první, třetí, …) a bíle ty sudé. Libovolné vertikální domino pak pokryje buď 2 bílá, nebo 2 černá políčka horizontální domino pokryje právě jedno bílé a jedno černé políčko.

Šachovnice $(4n+2)\times(4n+2)$ má $16(n^2+n)+4$ pole, na její vydláždění tedy potřebujeme $8(n^2+n)+2$ domin. Aby byl stejný počet horizontálních a vertikálních, musí být obou $4(n^2+n)+1$. Zejména tedy musí být lichý počet vertikálních domin. Na šachovnici je stejný počet černých a bílých polí. Abychom tedy pokryli všechna, musí být počet vertikálních domin pokrývající 2 černá pole stejný, jako počet vertikálních polí pokrývající 2 bílá pole (horizontální pokrývají jedno a jedno a tedy nemají vliv na rozdíl počtu pokrytých černých a bílých polí). To ale není možné, neboť vertikálních domin je lichý počet.

Nyní jeden skutečně klasický problém zvaný jezdcova procházka, o kterém by měl slyšet každý, kdo někdy řešil nějakou úlohu týkající se šachovnic.

Příklad 5.2. Šachovnici 4×4 nelze projít koněm tak, aby bylo navštíveno každé pole právě jednou.

Důkaz. Označíme si políčka šachovnice následovně:

A	E	F	C
F	D	B	E
E	B	D	F
C	F	E	A

Z polí A se lze dostat jen na pole B. Pokud tedy A není koncové (začáteční) pole cesty, musí v této cestě předcházet poli A pole B a stejně tak následovat pole B. Tedy cesta vypadá nějak takto $\dots BAB \dots$. To ale znamená, že alespoň jedno z polí A musí být počáteční, jinak bychom dostali uzavřenou cestu $BABA$. Stejně pro pole C a D. Hledaná cesta tedy musí vypadat takto $ABAB \dots DCDC$. Problém jsme tedy zredukovali na problém hledání cesty na 8 polích označených pismeny E a F. Zde je ale jasně vidět, že z žádného pole E se nelze dostat na pole F (nezapomeňte, teď nesmíme používat jiná pole než E a F!!!). Taková cesta tedy neexistuje.

Zajímavostí je, že 4 je největší rozměr čtvercové šachovnice, pro kterou to nejde. Zkuste si dokázat, že to skutečně na větších lze.

Jedna z nejdůležitějších metod důkazu v kombinatorice (a třeba i v informatice) je metoda invariantu. Pricipem je najít nějakou "veličinu" (počet, sudost, ...), která se nezmění při nějaké změně. Pro důležitost této techniky si ukážeme hned 2 příklady (první z nich je skutečně triviální, ale je z něho poznat esence invariantu), které jí užívají.

Příklad 5.3. Mějme na tabuli čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6. V jednom kroku si vybereme 2 čísla, smažeme je z tabule a napíšeme na ni jejich součet. Tak pokračujeme, dokud na tabuli nezbude jediné číslo. Jaká čísla můžeme takto dostat.

Důkaz. Můžeme dostat pouze jediné a to 21. Invariantem bude samozřejmě součet všech čísel na tabuli. Označme S. Dokažme si, že se skutečně jedná o invariant.

Buďte $n_1, \cdots, n_k$ čísla na tabuli. Čísla nemají žádné pevně dané pořadí, můžeme tedy předpokládat, že námi vybraná čísla jsou n_1, n_2. Původní součet $S_1 = n_1 + \cdots + n_k$. Součet po tomto kroku $S_2 = (n_1 + n_2) + n_3 + \cdots + n_k$. Díky asociativitě sčítání skutečně $S_1 = S_2$. Tedy se jedná o invariant.

Na konci nám zbyde jediné číslo na tabuli. Díky platnosti invariantu musí být jeho součet (to číslo samotné) rovno součtu čísel na začátku. Tedy se musí jednat o $1 + \cdots + 6 = 21$.

Příklad 5.4. Mějme šachovnici 8×8 a v každém políčku jedno celé číslo. V jednom kroku si vybereme nějaký čtverec 3×3 nebo 4×4 a všechna čísla v tomto čtverci zvýšíme o 1. Je možné pro libovolná počáteční čísla dostat po nějakém počtu kroků ve všech polích sudé číslo?

Důkaz. Jak už to tak u úloh na invariant (většinou) bývá, odpověď zní NE. Hledaný invariant je parita (sudost/lichost) součtu čísel na všech polích krom 3. a 6. řádku. Označme tento součet S. Invariant pak lze zapsat jako $I = S \pmod 2 = \text{konst.}$ (zbytek po dělení S dvěma je konstantní).

Proč je I invariant? Libovolný čtverec 3×3 obsahuje PRÁVĚ jeden z těchto řádku. Ve čtverci 3×3 tak ovlivníme 6 polí, která ovlivňují S. Ve čtverci 4×4 pak ovlivníme buď 12 polí, nebo 8 polí (pokud v něm leží jeden nebo dva z těchto řádků). Co se tedy stane s S? V prvním případě k němu přičteme 6, ve druhém 12 nebo 8, každopádně však přičtením sudého čísla nezměníme paritu S, skutečně se tedy jedná o invariant.

Nyní už tedy stačí říct, proč nám tento invariant zakazuje pro některé počáteční konfigurace dosáhnout požadovaného. K tomu potřebujeme nějakou takovou špatnou počáteční konfiguraci. Zjevně potřebujeme, aby S bylo liché. Pak nám totiž invariant zaručí, že vždy nějaké pole bude liché (součet sudých polí by nám dal sudé S). Taková počáteční konfigurace je třeba 1 v levém horním rohu a 0 všude jinde.

To je z tohoto textu vše, přejeme hodně štěstí a zábavy u řešení úloh!

BRKOS Team 2018