Pomocný text

Výroková logika

autor: *Viki*

Logika je nástroj, ktorý nám umožňuje matematicky uvažovať o veciach okolo nás. Dovoľuje nám formalizovať tvrdenia, ktoré chceme dokázať a zároveň formalizovať samotný dôkaz. Existuje mnoho druhov logík, ktoré sa líšia v použití a v ich sile. Najjednoduchšia logika je výroková logika (*propositional logic*), ktorej sa budeme venovať v tejto sérii. Mnoho vecí však nevieme vyjadriť iba pomocou výrokov, preto sa častejšie používa prvorádová logika (*first-order logic*), známa aj ako predikátová logika. Ďalšie logiky, ktoré už asi nepoznáte, sú napríklad druhorádové logiky (*second-order logic*) alebo temporálne logiky (*temporal logic*). Tie majú svoje využitie v pokročilejších oblastiach matematiky a informatiky.

Výroková logika pracuje s takzvanými **výrokovými formulami**. Základnými stavebnými kameňmi výrokových formulí sú **výrokové premenné** reprezentujúce výroky, a **logické spojky**, ktoré výrokové premenné spájajú do väčších formulí.

Výrokové premenné slúžia na reprezentáciu atomických výrokov. Atomické výroky sú tvrdenia, o ktorých môžeme povedať, či sú pravidé alebo nie, a zároveň ich nevieme rozdeliť na menšie výroky. Napríklad veta „Prší." je atomický výrok. Veta „Prší a je mokro." nie je atomický výrok, pretože vetu môžeme rozdeliť na dva atomické výroky: „Prší." a „Je mokro.".

Atomické výroky spájame dokopy logickými spojkami. V bežnej reči sú logickými spojkami napríklad výrazy „a", „alebo", „práve vtedy keď" a podobne. V logike ich zapisujeme značkami ako $\neg, \wedge, \vee \ldots$. Každá značka – takzvaná logická spojka – má svoj presne definovaný význam. Napríklad, spojka $\neg$ značí zápor a zväčša sa číta ako „Nie je pravda, že…". Spojka $\wedge$ znamená spojenie dvoch formulí a väčšinou sa číta ako „a zároveň".

Nech premenná A reprezentuje atomický výrok „Prší." a B reprezentuje „Je mokro.". Potom vetu „Prší a je mokro." môžeme preložiť do jazyka výrokovej logiky ako $(A \wedge B)$. Naopak, formulu $\neg A$ do bežného jazyka preložíme ako „Neprší.". Logické spojky môžu spájať dokopy nie len výroky, ale aj iné formule, napríklad $\big((A \wedge B) \vee \neg A\big)$.

Výrokové premenné reprezentujú **pravdivostné hodnoty** atomických výrokov. Pravdivostné hodnoty sú „pravda" (1) a „nepravda" (0). Pravdivosť výrokovej formule závisí od hodnoty výrokových premenných a od toho, akými logickými spojkami sú spojené.

Definícia 4.1. *Valuácia premenných Var je taká funkcia* $v\colon Var \to \{0,1\}$*, ktorá každej premennej* X *z Var priradí pravdivostnú hodnotu. Ak je* X *pravdivé, tak* $v(X) = 1$*, inak* $v(X) = 0$.

V nasledujúcej časti textu si predstavíme najznámejšie logické spojky. Každú spojku znázorníme pomocou takzvanej **pravdivostnej tabuľky**. Pravdivostnú tabuľku môžeme zostrojiť pre každú výrokovú formulu. Tabuľka má toľko riadkov, koľko existuje rôznych valuácií premenných v danej formuli.

Negácia $\neg$

Negáciu formule φ značíme ako $\neg\varphi$. Významovo znamená opaku pravdivostnej hodnoty pôvodnej formule φ. Napríklad, ak formula A reprezentuje tvrdenie „Prší.“, tak formula $\neg A$ reprezentuje tvrdenie „Neprší.“. Ak pravdivostná hodnota formule bola 0, tak hodnota negovanej formule bude 1. Naopak, ak bola 1, po aplikácii $\neg$ bude hodnota 0. Formálne povieme, že $v(\neg\varphi) = 1$ práve vtedy, keď $v(\varphi) = 0$. Negácia je aplikovaná na jednu formulu, preto jej hovoríme unárna logická spojka.

Konjunkcia $\wedge$

Konjunkciu značíme ako $\varphi \wedge \psi$. Je pravdivá jedine vtedy, keď sú pravdivé obe podformule φ a ψ. Napríklad, ak formula A reprezentuje tvrdenie „Prší.“ a formula B reprezentuje „Je mokro.“, tak $(A \wedge B)$ reprezentuje „Prší a (zároveň) je mokro.“. Formula $(\neg A \wedge B)$ reprezentuje „Neprší ale je mokro.“. Formálne povieme, že $v(\varphi \wedge \psi) = 1$ jedine vtedy, keď $v(\varphi) = v(\psi) = 1$.

Pravdivostná tabuľka pre túto spojku vyzerá nasledovne:

A	B	$(A \wedge B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

V prvých dvoch stĺpcoch vidíme všetky možné valuácie premenných A, B, a každý riadok zodpovedá jednej valuácii. V stĺpci $(A \wedge B)$ je pre každú valuáciu premenných uvedená valuácia výslednej formule.

Operácia $\wedge$ je binárna. Všimnite si, že nezáleží na poradí argumentov: $(A \wedge B)$ má vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu ako $(B \wedge A)$.

Príklad 4.1. Dokážte, že formula $(A \wedge \neg A)$ nie je nikdy pravdivá.

Pravdivosť formule závisí iba od jednej premennej, preto stačí uvážiť všetky možné hodnoty pravdivosti A. Jej negácia má vždy opačnú hodnotu. V tabuľke definujúcej konjunkciu môžete overiť, že pokiaľ sú hodnoty argumentov rôzne (aspoň jedno je 0), tak sa aj konjunkcia vyhodnotí na 0.

A	$\neg A$	$(A \wedge \neg A)$
0	1	0
1	0	0

Formula, ktorá nie je nikdy pravdivá, sa nazýva **kontradikcia**. Poznáme ju tak, že v tabuľke sa vyhodnotí na samé 0.

Disjunkcia $\vee$

Disjunkciu značíme ako $\varphi \vee \psi$. Je pravdivá vtedy, keď je pravdivá aspoň jedna z podformulí φ a ψ. Takže je pravdivá aj vtedy, keď sú pravdivé obe podformule. Napríklad ak A znamená „Prší.“ a B znamená „Sneží.“, tak $(A \vee B)$ znamená „Prší alebo sneží.“. Formálne, $v(\varphi \vee \psi) = 0$ jedine vtedy, keď $v(\varphi) = v(\psi) = 0$.

Pravdivostná tabuľka pre túto spojku vyzerá nasledovne:

A	B	$(A \vee B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Rovnako ako $\wedge$, spojka $\vee$ je binárna a nezáleží na poradí jej argumentov.

Príklad 4.2. Dokážte, že formula $(A \vee \neg A)$ je vždy pravdivá.

Vždy je aspoň jeden argument pravdivý. Pravdivostná tabuľka pre danú formulu vyzerá nasledovne:

A	$\neg A$	$(A \vee \neg A)$
0	1	1
1	0	1

Formula, ktorá je vždy pravdivá, sa nazýva **tautológia**. V tabuľke sa vyhodnotí na samé 1.

Implikácia $\Rightarrow$

Implikáciu značíme pomocou znakov $\Rightarrow$ alebo $\rightarrow$. Formula $(A \Rightarrow B)$ znamená „Ak je pravdivé A, tak je pravdivé aj B.“. Napríklad „Ak prší, tak je mokro.“. Veta je zjavne pravdivá, keď prší a je mokro. Je však nepravdivá, keď prší, ale nie je mokro. Aká je pravdivosť tejto vety, keď neprší? Podľa logiky, ak neprší, tak nás nezaujíma či je mokro alebo nie, oba výsledky sú možné. Preto formálne povieme, že $v(\varphi \Rightarrow \psi) = 0$ jedine vtedy, keď $v(\varphi) = 1$ a $v(\psi) = 0$.

Pravdivostnou tabuľkou to znázorníme nasledovne:

A	B	$(A \Rightarrow B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Všimnite si, ak hodnota A je 0, tak implikácia je pravdivá bez ohľadu na B.

Príklad 4.3. V pondelok učiteľ matematiky na hodine povedal: „Ak bude v utorok niekto chýbať, budeme písať písomku.“ Na ďalšej hodine nikto nechýbal, ale aj tak sa písala písomka. Mal učiteľ pravdu?

Nech A reprezentuje „V utorok niekto chýba.“ a B reprezentuje „Píše sa písomka.“. Potom učiteľove tvrdenie zapíšeme ako $(A \Rightarrow B)$. Podľa zadania je výrok A nepravdivý (pretože nikto nechýbal) a výrok B pravdivý (písala sa písomka). Ak sa pozrieme do tabuľky pre implikáciu na riadok, kde $v(A) = 0$ a $v(B) = 1$, zistíme, že $v(A \Rightarrow B)) = 1)$. Preto učiteľovo tvrdenie bolo pravdivé a hovoril pravdu. Učiteľ by nemal pravdu jedine v prípade, že by v utorok niekto chýbal a nepísala sa písomka.

Definícia 4.2. *Výrokové formule φ a ψ sú ekvivalentné, pokiaľ pre každú valuáciu premenných v platí $v(\varphi) = v(\psi)$. Píšeme $\varphi = \psi$.*

Príklad 4.4. Dokážte, že formule $(A \Rightarrow B)$, $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ a $(\neg A \vee B)$ sú navzájom ekvivalentné.

Potrebujeme ukázať, že pri každej kombinácii pravdivostných hodnôt A a B majú všetky tri formule rovnakú pravdivostnú hodnotu. Aby sme to ukázali, potrebujeme zostrojiť pravdivostnú tabuľku pre každú z troch formulí. Pre $(A \Rightarrow B)$ ju už poznáme, preto zostrojíme zvyšné dve.

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$(\neg B \Rightarrow \neg A)$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1

A	B	$\neg A$	$(\neg A \vee B)$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

V oboch prípadoch sme si ako pomôcku spravili stĺpec pre negácie premenných, ktoré sa vyskytujú v danej formuli. V prvej tabuľke sme posledný stĺpec zostrojili pomocou stĺpcov $\neg B$ a $\neg A$ a definície implikácie: $v(\neg B \Rightarrow \neg A)) = 0$ platí jedine vtedy, keď $v(\neg B) = 1$ a $v(\neg A) = 0$. V druhej tabuľke platí $v(\neg A \vee B) = 0$ jedine vtedy, keď sú $v(\neg A) = v(B) = 0$. Keďže výsledné stĺpce všetkých troch tabuliek sú rovnaké (a vstupy majú v rovnakom poradí), tak sú formule ekvivalentné.

Ekvivalencia $\Leftrightarrow$

Ekvivalenciu značíme ako $\Leftrightarrow$ alebo $\leftrightarrow$. Je pravdivá práve vtedy, keď majú oba argumenty rovnakú pravdivostnú hodnotu. Napríklad „Budeme písať písomku práve vtedy, keď bude niekto chýbať.“ môžeme reprezentovať ako $(A \Leftrightarrow B)$. Formálne, $v(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1$ práve vtedy, keď $v(\varphi) = v(\psi)$. Pravdivostná tabuľka je definovaná nasledovne:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Príklad 4.5. Dokážte, že formula $(A \Leftrightarrow \neg A)$ je kontradikcia.

Tabuľka pre formulu $(A \Leftrightarrow \neg A)$ vyzerá takto:

A	$\neg A$	$(A \Leftrightarrow \neg A)$
0	1	0
1	0	0

Stĺpec zodpovedajúci danej formuli obsahuje samé 0, preto je formula kontradikcia.

Príklad 4.6. Dokážte, že formule $(A \Leftrightarrow B)$ a $\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big)$ sú ekvivalentné.

Zostrojíme pravdivostnú tabuľku pre formulu $\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big)$.

A	B	$(A \Rightarrow B)$	$\wedge$	$(B \Rightarrow A)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Najprv sme spravili stĺpce pre jednotlivé implikácie a potom sme podľa nich vyplnili stĺpec $\wedge$. Stĺpec $\wedge$ vyšiel rovnako ako stĺpec pre $(A \Leftrightarrow B)$. Tým sme ukázali, že formula $\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big)$ je pravdivá práve vtedy, keď $(A \Leftrightarrow B)$ je pravdivá.

Z toho plynie, že formula $\Big(\big(A \Leftrightarrow B\big) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big)\Big)$ je tautológia.

Príklad 4.7. Učiteľ sa rozhodol, že na hodine vyskúša presne **dvoch** žiakov. Bude to buď Aneta, Bob alebo Cilka. Žiakov vyberie podľa týchto pravidiel: Ak vyskúša Anetu, tak vyvolá aj Boba. Vyskúša Boba alebo Cilku. Nevyskúša zároveň Anetu a Cilku. Koho určite vyskúša?

Takúto úlohu môžeme riešiť tak, že zadanie preložíme do výrokovej formule. Máme tri premenné: A, B, C. Vetu „Ak vyskúša Anetu, vyvolá aj Boba.“ preložíme na $(A \Rightarrow B)$. Vetu „Vyskúša Boba alebo Cilku.“ preložíme na $(B \vee C)$. Nakoniec, „Nevyskúša zároveň Anetu a Cilku“ preložíme na $\neg(A \wedge C)$.

Ďalej zostrojíme pravdivostnú tabuľku. Musíme spraviť riadok pre každú možnú kombináciu pravdivostných hodnôt A, B, C. Dostávame 8 možných kombinácií.

A	B	C	$(A \Rightarrow B)$	$(B \vee C)$	$\neg(A \wedge C))$	$\wedge$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0

Zostrojili sme stĺpec pre každú podformulu. V stĺpci $\wedge$ označíme tie riadky, v ktorých sú pravdivé všetky tri podmienky. Učiteľ sa rozhodol, že vyskúša dvoch žiakov, preto nás zaujímajú tie riadky, kde sú pravdivé práve dve z A, B, C. Takže jediné riadky, ktoré vyhovujú všetkým podmienkam, sú tie, kde $v(A) = v(B) = 1$, $v(C) = 0$ a $v(B) = v(C) = 1$, $v(A) = 0$.

Iné binárne spojky

Doteraz sme si predstavili jednu unárnu spojku $(\neg)$ a štyri binárne $(\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow)$. Spojok, ktoré sa v praxi používajú, je však oveľa viac. Rôznych binárnych spojok existuje 16. Niektoré sú zaujímavé menej (napríklad identita) a iné viac.

Spojka NAND značí negáciu konjunkcie. Spojka NOR značí negáciu disjunkcie. Spojka $\oplus$, často značená aj ako XOR *(exclusive or)*, je negácia ekvivalencie. Formulu $(A \oplus B)$ čítame ako „Buď A, alebo B.“.

A	B	A NAND B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	A NOR B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ternárne spojky

Ternárne spojky sú také, ktoré majú práve tri argumenty. Napriek tomu, že ich je viac ako binárnych (až 256), tak sa v praxi moc nepoužívajú. Jednu z nich si však ukážeme.

Definujeme spojku ITE[1]. Chceme, aby predstavovala rozhodovaciu podmienku: pokiaľ je premenná A pravdivá, tak hodnota $v(\text{ITE}(A, B, C)) = v(B)$. Naopak, ak premenná A je nepravdivá, tak $v(\text{ITE}(A, B, C)) = v(C)$.

Jej definícia pomocou pravdivostnej tabuľky bude vyzerať takto:

A	B	C	$\text{ITE}(A, B, C)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Príklad 4.8. Nájdite výrokovú formulu, ktorá bude obsahovať iba unárne a binárne spojky a bude ekvivalentná formuli $\text{ITE}(A, B, C)$.

Spomeňte si, že implikácia znamená „Ak A, tak B.“. Spojka ITE je zložená z dvoch implikácií: „Ak A, tak B. Ak A neplatí, tak C.“. Ako formulu to môžeme zapísať nasledovne: $\big((A \Rightarrow B) \land (\neg A \Rightarrow C)\big)$. Skúste si v tabuľke sami overiť, že táto formula je skutočne ekvivalentná formuli $\text{ITE}(A, B, C)$.

A	B	C	$(A \Rightarrow B)$	$\land$	$(\neg A \Rightarrow C)$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

[1] IF-THEN-ELSE

Plnohodnotné systémy logických spojok

V poslednom cvičení ste si vyskúšali, ako nejakú spojku vyjadriť pomocou iných. Tým sme ukázali, že nová spojka nám neprináša nijakú vyjadrovaciu silu – to, čo vieme zapísať pomocou nej, sme vedeli aj predtým. Teraz si ukážeme, že nepotrebujeme ani niektoré z binárnych spojok.

Príklad 4.9. Ukážte, že pre každú formulu, ktorá obsahuje spojky $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, existuje ekvivalentná formula, ktorá obsahuje iba spojky $\neg$ a $\wedge$.

Potrebujeme ukázať, že všetky zo zvyšných spojok vieme vyjadriť iba pomocou spojok $\neg$ a $\wedge$.

Ako prvú vyjadríme formulu $(A \vee B)$. Negácia disjunkcie, $\neg(A \vee B)$, je pravdivá jedine vtedy, keď sú A aj B nepravdivé. Je teda ekvivalentná formuli $(\neg A \wedge \neg B)$. Potom formula $\neg\neg(A \vee B)$ je ekvivalentná formuli $\neg(\neg A \wedge \neg B)$. Pravdivostnou tabuľkou overte, že aj $(A \vee B)$ je ekvivalentná formuli $\neg(\neg A \wedge \neg B)$.

Ďalej potrebujeme pomocou $\neg$ a $\wedge$ zapísať $(A \Rightarrow B)$. Z predchádzajúcich príkladov už vieme, že táto implikácia je ekvivalentná disjunkcii $(\neg A \vee B)$. Disjunkciu už však vieme prepísať pomocou $\neg$ a $\wedge$. Implikácia $(A \Rightarrow B)$ je teda ekvivalentná formuli $\neg(A \wedge \neg B)$. Overte toto tvrdenie pravdivostnou tabuľkou.

Keďže vieme, že ekvivalencia je len konjunkcia dvoch implikácii, prepísať $(A \Leftrightarrow B)$ iba pomocou $\neg$ a $\wedge$ už zvládnete sami!

Majme množinu spojok $\mathcal{L}$. Ak pre každú výrokovú formulu existuje ekvivalentná formula zapísaná iba pomocou spojok v $\mathcal{L}$, tak $\mathcal{L}$ nazveme **plnohodnotný systém** logických spojok. Často sa stretnete aj s pomenovaním **úplný systém**. Množina spojok $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ je plnohodnotný systém. Z predošlého príkladu potom plynie, že aj $\{\neg, \wedge\}$ je plnohodnotný systém. Inými plnohodnotnými systémami sú $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \Rightarrow\}$ a dokonca aj $\{\text{NAND}\}$ a $\{\text{NOR}\}$.

Príklad 4.10. Dokážte, že $\{\text{NAND}\}$ tvorí plnohodnotný systém.

Stačí ukázať, že pomocou NAND sme schopný nahradiť nejaký plnohodnotný systém, teda všetky spojky z nejakého plnohodnotného systému vieme zapísať iba pomocou NAND. Z pravdivostnej tabuľky pre NAND je vidno, že $(A \text{ NAND } A)$ je ekvivalentné $\neg A$. Tým sme ukázali, ako negáciu vyjadriť pomocou NAND. Z definície NAND, $(A \wedge B)$ je ekvivalentné $\neg(A \text{ NAND } B)$. Negáciu už vyjadriť vieme, preto $(A \wedge B)$ je ekvivalentné $\big((A \text{ NAND } B) \text{ NAND } (A \text{ NAND } B)\big)$. Tým sme konjunkciu vyjadrili iba pomocou NAND. Overiť, že to skutočne platí, môžete pravdivostnou tabuľkou.

Skúste podobným spôsobom ukázať, že $\{\text{NOR}\}$ tvorí plnohodnotný systém.