Pomocný text

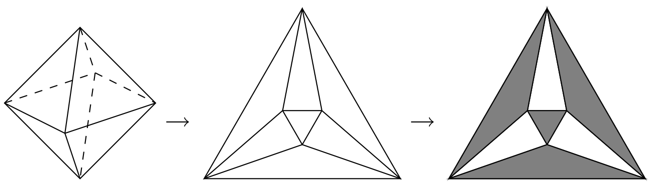
Hrátky s tělesy

Tato série se zabývá řešením úloh v prostoru. Proto zde uvedeme několik málo metod spolu s příklady, které vám mohou při řešení úloh pomoci.

Příklad 3.1. *Kolika nejméně barvami lze obarvit stěny pravidelného osmistěnu tak, aby žádné dvě stěny sousedící hranou neměly stejnou barvu?*

Úloha je samozřejmě triviální pro lidi s dobrou představivostí. Komu ale představivost slouží méně, může si pomoct převedením osmistěnu do tzv. „rovinného grafu“.

Rovinný graf má stejně vrcholů, hran i stěn jako osmistěn (pokud si představíme vnější oblast jako samostatnou stěnu). Dále z každého vrcholu vychází odpovídající počet hran a každá stěna (i ta vnější) má odpovídající počet stran. V podstatě se chová stejně jako osmistěn. Vypadá takto:

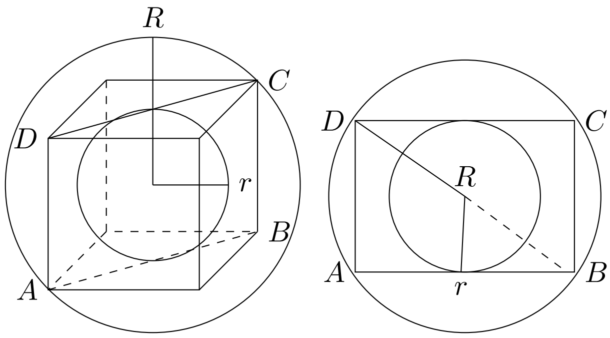


Vidíme tedy, že osmistěn lze takto obarvit dvěma barvami.

Poznámka. Do rovinného grafu lze převést jakýkoli konvexní mnohostěn. Je to způsob, jak si zakreslit trojrozměrný objekt na papír, pokud nás nezajímají vzdálenosti v mnohostěnu. V rovinném grafu také platí, stejně jako v konvexních mnohoúhelnících, tzv. *Eulerova věta o mnohostěnech*. Ta říká, že označíme-li V jako počet vrcholů mnohostěnu, H jako počet hran a S jako počet stěn, pak platí: $V - H + S = 2$.

Příklad 3.2. *kolikrát je poloměr R koule opsané krychli větší než poloměr r koule jí vepsané?*

Dalším způsobem, jak se vyhnout kreslení trojrozměrným perem na trojrozměrný papír, je vybrat si jednu rovinu, ve které budeme dále provádět své výpočty. Pro nás je to jednoznačně rovina $\overleftrightarrow{ABC}$ (viz obrázek).



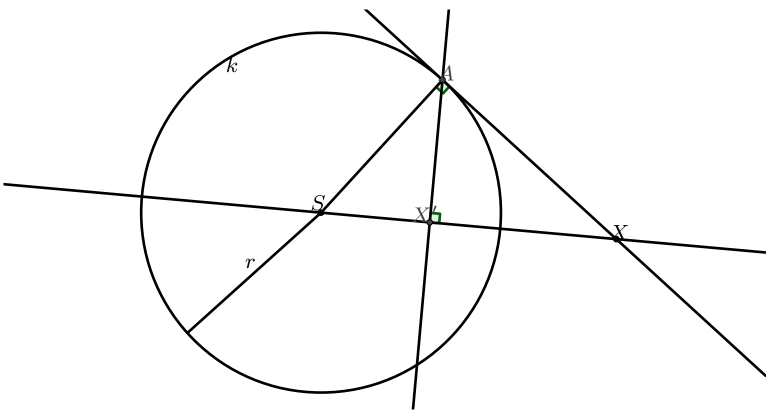
Má-li krychle stranu délky a, pak $r = \frac{a}{2}$. Protože AB je úhlopříčka čtverce, platí $|AB| = a \cdot \sqrt{2}$. Z pravého obdelníku lze snadno vyčíst $R = \frac{\sqrt{|AB|^2+|AD|^2}}{2} = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Poloměry jsou tedy v poměru $\frac{R}{r} = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$

Následující odstavce jsou věnovány *kruhové inverzi* a její trojrozměrné verzi, *kulové inverzi.* Kruhová inverze je geometrické zobrazení zadané středem S a poloměrem r (neboli kružnicí). Jednoduše řečeno, kruhová inverze zobrazí všechny body zevitř kružnice vně a ze vnějšku dovnitř.

Definice 3.1. *Kruhová inverze je zobrazení $f(S, r) : E_2 \to E_2$. Pro každý vzor X a jeho obraz X' platí:*

1. $X' \in \overrightarrow{SX}$
2. $|SX| \cdot |SX'| = r^2$

Příklad 3.3. *Je dán bod X a kružnice k se středem S a poloměrem r. Nalezněte obraz bodu X v kruhové inverzi podle kružnice k.*



Sestrojme na kružnici bod A tak, aby byl úhel $|\sphericalangle SAX|$ pravý a z něj spusťme kolmici na přímku $\overleftrightarrow{SX}$. Na patě této kolmice se nachází obraz bodu X.

Důkaz: Trojúhelníky SAX a SAX' jsou si podobné podle věty (uu), takže platí:

$$\frac{|SA|}{|SX|} = \frac{|SX'|}{|SA|}$$
$$|SA|^2 = |SX| \cdot |SX'|$$
$$r^2 = |SX| \cdot |SX'|$$

Poznámka. Kruhová inverze pracuje ještě s tzv. *Möbiovým bodem*, což je bod v nekonečnu, kterým prochází každá přímka. Ten se v kruhové inverzi zobrazí na střed S a střed S na Möbiův bod. Uveďme si teď několik vlastností:

- každý bod ležící na kružnici se středem S a poloměrem r je samodružný (zobrazí se sám na sebe)
- každá kružnice neprocházející středem S se zobrazí na kružnici neprocházející středem S
- každá přímka procházející středem S je samodružná
- každá přímka neprocházející středem S se zobrazí na kružnici procházející středem S a naopak
- každá polorovina ohraničená přímkou a neobsahující střed S se zobrazí do uzavřené části roviny (má konečný obsah), která je ohraničená obrazem přímky
- každá polorovina ohraničená přímkou a obsahující střed S, se zobrazí do otevřené části roviny (má nekonečný obsah), která je ohraničená obrazem přímky
- zobrazení zachovává úhly

Příklad 3.4. *Je dána kružnice k se středem S a poloměrem r a přímka p, která neprochází středem S a protíná kružnici ve dvou bodech, A a B. Popiště obraz přímky v kruhové inverzi podle kružnice k.*

Přímka neprochází středem S, takže se zobrazí na kružnici procházející středem S. Dále body A, B leží na kružnici k, takže jsou samodružné. Víme tedy, že kružnice bude procházet středem S a body A a B, což ji jednoznačně určuje.

Když rozšíříme pojem kruhové inverze do trojrozměrného prostoru, získáme tzv. *kulovou inverzi.*

Definice 3.2. *Kulová inverze je zobrazení $f(S, r) : E_3 \to E_3$. Pro každý vzor X a jeho obraz X' platí:*

1. $X' \in \overrightarrow{SX}$
2. $|SX| \cdot |SX'| = r^2$

Poznámka. I prostor, kde kulovou inverzi používáme, obsahuje již zmíněný Möbiův bod a také má jen jeden. Prochází jím nejen všechny přímky, ale i všechny roviny, což nám rozšiřuje vlastnosti inverze.

- každý bod ležící na sféře (povrchu koule) je samodružný
- každá sféra neprocházející středem S se zobrazí na sféru neprocházející středem S
- každá rovina procházející středem S je samodružná
- každá rovina neprocházející středem S se zobrazí na sféru procházející středem S a naopak
- každý poloprostor ohraničený rovinou, který obsahuje střed S se zobrazí na otevřenou část poloprostoru ohraničenou obrazem roviny

- každý poloprostor ohraničený rovinou, který neobsahuje střed S se zobrazí na uzavřenou část poloprostoru ohraničenou obrazem roviny

Kruhová inverze se používá mimo jiné k řešení některých tzv. *Apoloniových úloh.* To jsou úlohy, kde je cílem najít kružnici splňující tři podmínky, kde každá podmínka říká: „kružnice prochází daným bodem nebo se dotýká dané přímky nebo úsečky“.

Příklad 3.5. *Jsou dány kružnice k, l a bod B. Sestrojte kružnici, která se obou kružnic dotýká a bodem B prochází.*

Řešení však necháme na vás.

Přejeme hodně zdaru při řešení úloh.