Pomocný text

3D

autor: *Vojta*

V této sérii si budeme povídat o *množinách bodů v prostoru*. Spousta z vás určitě zná z planimetrie úlohy, kde hledáte množiny všech bodů, které mají určitou vlastnost. Typicky: „Najděte v rovině množinu všech bodů, které mají konstantní poměr vzdáleností od dvou zadaných bodů“[1]. Pokud si myslíte, že jste tyto úlohy nepotkali, tak se pravděpodobně mýlíte. Drtivá většina objektů v rovině je množina bodů mající nějakou vlastnost. Vždyť prachobyčejná kružnice je množina všech bodů, které jsou stejně vzdálené od jednoho pevného bodu - středu. Nebo ještě jednodušší příklad: Osa úsečky je přeci množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od krajních bodů úsečky.

Ve škole jste se však dosud málo setkali s pojmem množina bodů, která se vztahuje na prostorové útvary. V tomto povídaní si toto téma osvětlíme. V celém textu budeme používat zkratky m. b. = množina bodů a m. v. b = množina všech bodů. Dosti už plkání.

1.1 Definice

Prostorem rozumíme klasický trojrozměrný euklidovský prostor. Množina M všech bodů prostoru, které mají danou vlastnost V, je množina bodů, pro kterou současně platí:

- Každý bod množiny M má vlastnost V.
- Každý bod prostoru, který má vlastnost V, patří do množiny M.

Jinými slovy: Dokážeme-li o množině M, že každý její bod má vlastnost V, dokázali jsme, že je M m.b., které mají vlastnost V. Chceme-li dokázat, že M je množinou **všech** bodů (m.v.b.), které mají vlastnost V, musíme ještě dokázat, že každý bod, který má vlastnost V patří do množiny M.

1.2 Základní pojmy

Pro ty, kteří si potřebují osvěžit některé pojmy, které budeme potřebovat, je nachystaný tento odstavec.

[1] Jde o Apolloniovu kružnici, ale tu v této sérii řešit nebudeme.

- M. v. b. C v rovině, z kterých je vidět danou úsečku AB pod pravým úhlem ($|\sphericalangle ACB| = 90^o$), je kružnice nad průměrem AB. Tato kružnice se nazývá Thaletova.
- M. v. b. v rovině, které mají stejný součet vzdáleností od dvou pevně zvolených bodů - ohnisek, se nazývá elipsa. Rotací elipsy kolem jedné z jejích os dostaneme rotační elipsoid.
- Hyperbola je m. v. b. v rovině o dané absolutní hodně rozdílu vzdáleností od dvou pevných ohnisek. Podobně rotací hyperboly vznikne rotační hyperboloid dvoudílný nebo jednodílný, podle toho jestli rotuje podle hlavní či vedlejší osy.
- Parabola je m. v. b. v rovině, které jsou stejně vzdáleny od dané přímky jako od daného bodu, který na ní neleží. Rotací paraboly kolem její osy dostaneme rotační paraboloid.
- Sféra (kulová plocha) je m. v. b., které mají stejnou vzdálenost od zadaného bodu - středu. Sféra vznikne rotací kružnice kolem jejího libovolného průměru. Průnikem sféry a roviny je kružnice, bod nebo prázdná množina.
- Rotační válcová plocha je m. v. b. v prostoru, které mají stejnou vzdálenost od zadané řídící přímky. Můžeme ji dostat také rotací přímky rovnoběžné s osou rotace kolem osy rotace. Průnikem rotační válcové plochy a roviny je dvojice přímek, jedna přímka, prázdná množina nebo elipsa (případně kružnice).
- Rotační kuželová plocha vznikne rotací přímky kolem osy rotace, se kterou je přímka různoběžná. Průnikem rotační kuželové plochy a roviny můžeme dostat dvojici přímek, elipsu, parabolu nebo hyperbolu.

1.3 Mocnost bodu ke kulové ploše

Při vyšetřování množin bodů v rovině se nám často hodí mocnost bodu ke kružnici. Připomeňme si, oč jde, a odvoďme ekvivalentní tvrzení v prostoru.

Je dán bod M a kružnice k se středem v bodě O a poloměrem r. Sestrojíme-li bodem M sečnu a kružnice k a označíme-li A, A' společné body kružnice k a sečny a, pak platí o velikostech úseček MA, MA' vztah

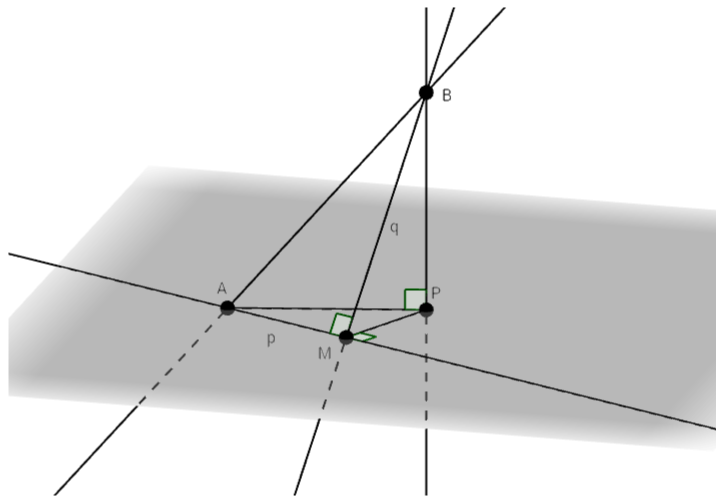
$$|MA| \cdot |MA'| = ||MO|^2 - r^2| = konst. \quad (1)$$

Číslo $|MO|^2 - r^2$ se nazývá mocnost bodu M ke kružnici k. Nyní snadno dokážeme platnost prostorového vztahu, který vyjadřuje mocnost bodu ke kulové ploše $\varkappa(O, r)$. Plochu $\varkappa$ můžeme vytvořit otáčením kružnice $k(O, r)$ kolem osy MO, takže vztah (1) platí hned také pro všechny kružnice plochy $\varkappa$ vzniklé otáčením kružnice k kolem osy MO (za předpokladu $M \neq O$) a číslo $|MO|^2 - r^2$ udává i mocnost bodu M k ploše $\varkappa$. Je-li $M = O$, otáčíme kružnici k kolem libovolné přímky procházející bodem O.

1.4 Řešené příklady

Příklad 1.1. Je dána rovina ρ, v ní bod A a mimo ni bod B. Určete m. v. b., které jsou patou kolmice vedené bodem B k přímce, jež prochází bodem A a leží v rovině ρ.

Řešení. Hledaná m. v. b. obsahuje zřejmě jen body, které leží v rovině ρ. Předpokládejme nejprve, že kolmice vedená bodem B k rovině ρ protíná rovinu v bodě $P \neq A$. Bod P je jeden bod naší m. b., neboť je patou kolmice vedené bodem B k přímce AP. Rovněž bod A patří do naší m. b., protože je patou kolmice vedené bodem B k přímce, která leží v rovině ρ, prochází bodem A a je kolmá na přímku AP. Zvolme dále v rovině ρ libovolnou přímku p procházející bodem A, různou od přímky AP. Označme M patu kolmice q vedené bodem B k přímce p. Snadno dokážeme, že přímka PM je kolmá k přímce p. Je totiž $p \perp BM$ a $p \perp BP$, protože $BP \perp \rho$. Odtud vyplývá, že je přímka p kolmá ke všem přímkám roviny BMP, a tedy $p \perp PM$. Proto body M leží v rovině ρ na Thaletově kružnici k sestrojené nad průměrem AP. Tím jsme ukázali, že hledaná m. v. b. je podmnožinou k (každý bod, který splňuje zadání leží na k). Musíme ještě ukázat, že každý bod z k splňuje zadání. Nebo-li ukázat, že k neobsahuje, žádné body navíc.



Zvolíme-li obráceně libovolný bod M ($M \neq A, M \neq P$) na kružnici k, pak platí $AM \perp PM$ (bod M leží na k), $AM \perp BP$, a tedy i AM je kolmá k rovině BPM, a proto je $AM \perp BM$. Protože také body A, P kružnice k patří do hledané m. b., dokázali jsme, že hledanou m.v.b. je Thaletova kružnice k.
Ve zvláštním případě, kdy $AB \perp \rho$ je hledaná m. v. b. zřejmě pouze bod A.

Na tomto příkladě bylo vidět, že je potřeba rozlišit různé polohy zadaných bodů, protože se podle nich mění výsledek úlohy.

Příklad 1.2. Je dána rovina σ a dvě mimoběžné přímky a, b, které jsou rovnoběžné s rovinou σ a jež mají od roviny σ stejnou vzdálenost. Určete v rovině σ množinu středů všech kulových ploch, které se dotýkají daných přímek a, b.

Řešení. Jestliže je bod M roviny σ středem kulové plochy $\varkappa$, která se dotýká přímek a, b v bodech A, B, pak je přímka MA kolmá k přímce a, přímka MB je kolmá k přímce b a je $|MA| = |MB|$. Označme a', b' pravoúhlé průměty přímek a, b do roviny σ a P, resp. Q patu kolmice vedené bodem A k přímce a', resp. bodem B k přímce b'. Protože je $|AP| = |BQ|$ a úhly APM, BQM jsou pravé, jsou pravúhlé trojúhelníky MAP, MBQ shodné. Proto je $|MP| = |MQ|$. Leží tedy nutně bod M na ose o úhlu přímek a', b'.
Obráceně, zvolíme-li na jedné z os $o \perp o'$ přímek a', b' libovolný bod M, pak ze shodných trojúhelníků MAP, MBQ snadno dokážeme, že bod M má od přímek a, b stejně velké

vzdálenosti, a lze tedy sestrojit kulovou plochu se středem v bodě M, která se dotýká přímek a, b. To zřejmě platí i v případě, kdy za bod M zvolíme průsečík os o, o'.
Hledanou množinou všech bodů je sjednocení os o, o'.

1.5 Rady nakonec

Toť vše k našemu stručnému úvodu do této problematiky. Jako vždy vám přejeme hodně zdaru při řešení úloh. Na závěr máme pro vás pár tipů:

- Nebojte se použít 3D rozšíření geogebry. Tu si můžete buď stáhnout nebo využít online verze. Ze začátku může být ovládání nemotorné, nicméně rychle si zvyknete. Platí pravidlo, že hezký obrázek pomůže, špatný uškodí. A opravujícím také zvednete náladu!

- V této sérii budou orgové velmi přísní na ty, kteří se rozhodnou řešit první čtyři úlohy analyticky (zavedení soustavy souřadnic, počítání rovnic do vyčerpání,...). Cílem této série je rozvinout geometrickou představivost v prostoru, což by se v tomto případě úplně minulo účinkem. Kdo se i přes naše varování rozhodne jít touto cestou, tomu úlohu opravíme, ale budeme pilně hledat chyby ve výpočtech! Na ty ostatní budeme mírní :).

- Nezapomeňte dokázat oba „směry“ úlohy. Tvrdíte-li o M, že je hledanou m. v. b., musíte dokázat, že každý její bod splňuje zadání a žádný jiný to nesplňuje. Rozlišujte m. b. daných vlastností a m. v. b. daných vlastností. Více viz výše.

- Nezapomeňte rozmyslet různé polohy zadaných bodů, zvláště krajní případy.

- Pokud někoho zajímá tato problematika více a chce si něco najít na internetu, tak v angličtině se m. v. b. dané vlastností nazývá *locus*.

- Pokud nebude cokoliv jasné, tak se nebojte zeptat. Buď můžete napsat na brkosí mail, na můj (najdete na webu) nebo mi napište na facebooku.