Pomocný text

NÁHODA

Úvod

Tato série se zabývá náhodou a pravděpodobností. Lidé totiž už od počátku věků toužili předpovídat, co se stane, nebo alespoň pravděpodobnost jednotlivých možností a matematika jim mohla velmi pomoci. Krásně to dokládá problém ze 17. století, který řešil Antoine Gombaud, známý spíše jako rytíř de Méré. Týkal se šance na výhru v kostkách a celé zadání i řešení jsou popsány níže. Jeho řešení mu nesedělo, a proto napsal největšímu matematikovi, kterého znal, a nebyl jím nikdo jiný než Blaise Pascal. Ten o problému diskutoval v korespondenci s matematikem Pierrem de Fermatem a společně dali vzniknout **teorii pravděpodobnosti**. Tento příběh ukazuje, že i hazardní hráč může pomoci rozvoji matematiky.
Teorie pravděpodobnosti je však obor dosti náročný, protože občas není lehké rozhodnout, který výsledek je správný a jaký špatný. Krásným příkladem je Monty Hallův problém, jenž ve své době způsobil velký poprask, protože i řada matematických "odborníků"došla ke špatnému řešení a nebylo snadné jim dokázat jejich chybu. To, jak aspoň trochu ověřit správnost výsledku, si ukážeme na těchto dvou příkladech.
Pro začátek je také potřeba definovat základní pojmy. Pokud je však znáte, můžete je přeskočit a jít přímo na příklady.

Definování základních pojmů

Množinu všech možných výsledků pokusu značíme Ω. Možné výsledky $\omega \in \Omega$ musí být stanoveny tak, že se navzájem vylučují a jeden z nich vždy nastává. Například čísla 1 až 6 na běžné hrací kostce.

Každému výsledku ω je přiřazena jeho **pravděpodobnost** $p(\omega)$. Pravděpodobností $p(\omega)$ jsou nezáporná čísla, jejich součet je roven jedné:

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1. \tag{5.1}$$

Má-li množina Ω m prvků a jsme-li přesvědčení, že jsou **stejně pravděpodobné**, položíme $p(\omega) = \frac{1}{m}$ pro všechna ω.

Podmnožinu množiny ω se nazývají **jevy**; značí se většinou velkými písmeny A, B, C, ... Prvkům jevu A říkáme **výsledky příznivé jevu A**.

Pravděpodobnost jevu A značíme $P(\mathrm{A})$. Definuje se jako součet pravděpodobností výsledků příznivých jevů A, tj:

$$P(\mathrm{A}) = \sum_{\omega \in \mathrm{A}} p(\omega). \tag{5.2}$$

V pokusu, který má m stejně pravděpodobných výsledků, se pravděpodobnost jevu rovná počtu výsledků příznivých dělenému počtem všech možných výsledků:

$$P(\mathrm{A}) = \frac{m(\mathrm{A})}{m}. \tag{5.3}$$

A $\cup$ B znamená, že nastává aspoň jeden z jevů A, B.
A $\cap$ B znamená, že nastávají oba jevy, A i B.
A' znamenají opačný jev k jevu A, tj. jev, který nastává právě tehdy, nenastane-li jev A.

Jestliže A, B se navzájem vylučuji, je - li A $\cap$ B $= \emptyset$

Jestliže A, B se navzájem vylučuji, potom

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}). \tag{5.4}$$

V obecnějším případě, kdy nemůžeme zaručit, že se jevy vylučují:

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}). \tag{5.5}$$

Pro opačný jev platí

$$P(\mathrm{A'}) = 1 - P(\mathrm{A}). \tag{5.6}$$

Řekneme, že **jevy A a B jsou nezávislé**, jestliže platí:

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B}). \tag{5.7}$$

Problém rytíře de Méré

Zadání

Antoine Gombaud, rytíř de Méré (1607 - 1685), který svůj volný čas trávil hraním hazardních her, se bavil sázením se o to, že mu při 4 hodech kostkou padne aspoň jednou šestka. Někdy byl úspěšný, jindy ne, celkově však vydělával. Své úspěchy si zdůvodnil takto: Při jednom hodu je pravděpodobnost padnutí šestky 1/6; při čtyřech hodech to tedy bude 4-krát více, tedy 4/6. Později se začal sázet, že mu při 24 hodech se dvěma kostkami padne alespoň jednou dvojice šestek. Vycházel z toho, že při jednom hodu se dvěma kostkami je pravděpodobnost padnutí dvojice šestek 1/36. Sečtením 24 těchto hodnot dohromady a získal 24/36, což je rovno 4/6. Usoudil tedy, že jsou pravděpodobnosti výhry v obou hrách stejné a on bude dál vydělávat. Ke svému překvapení však začal naopak prodělávat. Dokážete vysvětlit v čem udělal rytíř de Méré chybu?

Řešení

Chyba je už ve výpočtu pravděpodobnosti první varianty. Sčítat je možné pouze pravděpodobnosti jevů, které se navzájem vylučují. Například pravděpodobnost, že v jednom hodě hodí šestku nebo jedničku, je pak opravdu 2/6. Ale při opakovaném hodu kostkou se přitom klidně může stát, že šestka padne i víckrát a tyto možnosti se potom v uvedeném součtu započítají vícekrát.
Nejjednodušší způsob, jak vypočítat správnou hodnotu pravděpodobnosti, je následující úvaha. Uvažujme nejprve hody jednou kostkou. Pravděpodobnost, že šestka *nepadne*, je v

každém hodu rovna 5/6. Při čtyřech hodech je tedy pravděpodobnost, že šestka nepadne ani jednou, rovná součinu

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \doteq 0,482. \tag{5.8}$$

Pravděpodobnost, že naopak aspoň jedna šestka *padne*, je potom rovná $1 - 0,482 = 0,518$. Správná hodnota pravděpodobnosti je tedy menší než hodnota, kterou vypočítal rytíř de Méré, stále je však větší než 1/2. Při dlouhodobém hraní proto de Méré vyhrál více než polovině případů a celkově tak vydělal.
Podobně můžeme postupovat i v případě hodu dvěma kostkami, kdy správná hodnota pravděpodobnosti, že při 24 hodech padne aspoň jednou dvojice šestek, vychází:

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \doteq 0,491. \tag{5.9}$$

Je vidět, že z dlouhodobého hlediska musel prohrávat. Zajímavou otázkou je kolikrát musel hodit, aby odhalil 2,7% nesrovnalost obou výsledků. Tu však řešit nebudeme.

Byly naše úvahy korektní? A jak je popsat matematickým formalismem, který zde byl přestaven? Zkusíme odpovědět na oboje otázky.
Kostka, kterou házíme, má 6 stran. Jev, že padne strana s jedničkou, dvojkou, ... ,šestkou si postupně označíme ω_1, ω_2, ..., ω_6. Předpokládáme, že máme ideální kostku a tím pádem pravděpodobnost všech stěn je stejná a je rovná 1/6.
Nejprve nás zajímá jev, že nepadne 6 při jednom hodu, který si označíme jako A. Pravděpodobnost jevu A je rovná pravděpodobnosti, že nastane jev $\omega_1 \cup \omega_2 \cup \omega_3 \cup \omega_4 \cup \omega_5$. Abychom ji vypočítali, stačí nám všechny pravděpodobnosti sečíst a dostáváme $P(\mathrm{A}) = 5/6$. To jsme mohli provést pouze protože se všechny jevy ***vylučují*** tj. není možné, aby při jednom hodu například padla zároveň jednička a dvojka.
Dále nás zajímá jev B, že nepadne 6 ani jednou ve 4 hodech, který se skládá ze 4 jevů A, kterým dáme index podle pořadí hodu. Protože v každém hodu musí padnout něco jiného než šestka, tak platí $\mathrm{B} = \mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3 \cap \mathrm{A}_4$. Pravděpodobnost jevů pro jednotlivé hody je pořád stejná a protože jsou tyto jevy na sobě *nezávislé*, tak můžeme jejich pravděpodobnost vypočítat pomoci součinu:

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3 \cap \mathrm{A}_4) = P(\mathrm{A}_1) \cdot P(\mathrm{A}_2) \cdot P(\mathrm{A}_3) \cdot P(\mathrm{A}_4) = (P(\mathrm{A}))^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^4. \tag{5.10}$$

Jev C, že padne aspoň jedna šestka, je opačný k jevu B. Proto stačí vypočítat $P(\mathrm{C}) = 1 - P(\mathrm{B})$ a tím pádem dostáváme dostáváme řešení naší úlohy.
Taková přehnaná korektnost může působit trochu zbytečně, a taky to zbytečné trochu je. Dělá to však naše úvahy exaktnější a korektnější, což se hodí zejména při hádkách o správnosti našeho výsledku. Také si na takovém příkladě můžeme uvědomit, kdy a za jakých podmínek pravděpodobnost sčítáme a násobíme.

Zajímavé je také alternativní řešení pomoci kombinatoriky. Všech možností, které můžou padnout, je $6^4 = 1294$. Počet příznivých možností je složitější, protože může šestka vícekrát.
Možností, kdy padne právě jedna šestka, je $4 \cdot 5^3 = 500$, protože se může objevit v jednom ze 4 hodů a zbylé čísla mají 5^3 možností, jak můžou vypadat.

Pro případ, že padnou právě dvě šestky existuje $6 \cdot 5^2$ možností, protože dvě šestky můžeme rozmístit 6 různými způsoby mezi 4 hody a zbylé čísla mají 5^2 možností.
Pro možnost, že padnou právě 3 šestky, je celkově $4 \cdot 5$, protože je můžeme rozmístit 4 způsoby a zbylé číslo má 5 možností.
Možnost, že padnou 4 šestky, je jen jedna.
Všechny tyto jevy se vylučují, takže je můžeme sečíst a celkově máme 671 příznivých možností. Podělením celkovým počtem možností dostáváme stejnou pravděpodobnost, kterou jsme vypočítali výše. Zobecněním těchto úvah by šlo spočítat i druhou část, ale to zde nebudeme provádět, protože by to bylo zaprvé zdlouhavé a za druhé se tento text věnuje hlavně pravděpodobnosti bez nutnosti kombinatoriky.

Diskuze

Na tomto příkladě si může uvědomit, jak těžké je ověřit správnost výsledku. Prvním přibližným testem může být naše intuice. Člověk má celkem dobrou schopnost odhadovat pravděpodobnost, takže tuší, že má například vyjít malá nebo velká pravděpodobnost. Pro přesné ověření to však nestačí.
Druhou možností, kterou ukázal už rytíř de Méré, je danou situaci mnohokrát zopakovat a sledovat jestli odpovídá naším předpovědím. V dnešní době je možné na toto využít i počítač, který nemá problém udělat náhodný pokus mnohokrát za sebou.
Další metodou, kterou v tomto příkladu sice nemůžeme využít, ale potřeba ji zmínit, je vyzkoušení výsledek pro nějaké pěkně hodnoty parametru v zadání. Například když řešíme nějakou úlohu pro n kostek a dojdeme k obecnému vzorci, který závisí na n, tak je dobré ověřit náš vzorek pro malé n rovno 1, 2 atd. Je překvapivé, jak často se i na tak jednoduchý test zapomíná.

Monty Hallův problém

Zadání

Veskrze poctivý moderátor umístil soutěžní cenu – drahé auto – za jedny ze tří dveří. Za každými ze zbývajících dveří je cena útěchy – koza. Úkolem soutěžícího je zvolit si jedny dveře. Poté moderátor otevře jedny ze dvou zbývajících dveří, ale jen ty, za nimiž je koza. Teď má soutěžící možnost buď ponechat svou původní volbu, nebo změnit volbu na zbývající dveře. Soutěžící vyhrává cenu, která je za dveřmi, které si zvolil. Soutěžící nemá žádné předchozí znalosti, které by mu umožnily odhalit co je za dveřmi.
Nechť soutěžící nejprve zvolí dveře číslo 1. Nechť moderátor otevře dveře číslo 3, za kterými je koza. Zvýší se šance na výhru auta, pokud soutěžící změní volbu na dveře číslo 2?

Řešení

Odpověď zní ano, šance na výhru auta je dvojnásobná, pokud soutěžící změní svou volbu, než když ponechá původní volbu. Důvodem je, že pro výhru auta při strategii ponechání původní volby je nutno hned na začátku vybrat dveře za kterými je auto, což je jedna možnost ze tří. Naproti tomu, pro výhru auta při strategii změny volby je nutno na začátku vybrat dveře, za kterými je koza, což jsou dvě možnosti ze tří.

V okamžiku, kdy je soutěžící dotázán, zda chce změnit svou volbu, mohly nastat tři situace odpovídající původní volbě soutěžícího, každá s třetinovou pravděpodobností:

Soutěžící původně zvolil dveře ukrývající kozu číslo 1. Moderátor otevře dveře se zbývající kozou.
Soutěžící původně zvolil dveře ukrývající kozu číslo 2. Moderátor otevře dveře se zbývající kozou.
Soutěžící původně zvolil dveře ukrývající auto. Moderátor otevře dveře s jednou z koz.

Pokud se soutěžící rozhodne pro změnu volby, vyhrává auto v prvních dvou případech. Hráč ponechávající původní volbu vyhrává pouze ve třetím případě. Šance na výhru při změně je tedy 2/3, neboli soutěžící dodržující strategii změny vyhrává auto v průměru ve dvou ze tří her.

Diskuze

Pro pochopení výsledku může být snazší uvažovat sto dveří namísto tří. V tomto případě je za 99 z dveří koza a jedny dveře s autem. Soutěžící si zvolí dveře, v 99 % případů za nimi bude koza. Šance zvolit napoprvé správné dveře je minimální, pouze 1 %. Moderátor poté otevře 98 z ostatních dveří, za nimiž jsou kozy a nabídne soutěžícímu změnit volbu na jediné další neotevřené dveře. V 99 případech ze 100 tyto dveře ukrývají auto, neboť v 99 případech ze 100 soutěžící původně zvolil kozu. V tomto případě je vždy výhodné volbu změnit.

Nejčastější námitka k řešení je názor, že při určování pravděpodobnosti lze z různých důvodů zanedbat minulost. Proto jsou první volba dveří i moderátorova vynucená reakce zanedbány. Protože na výběr zbývají dvoje dveře, mnoho řešitelů dojde k závěru, že pravděpodobnost výhry je padesát na padesát.

Ačkoliv zanedbání minulosti funguje pro některé hry, například hod mincí, není to pravidlem. V našem případě můžeme zanedbat první otevření dveří. Soutěžící volí mezi původně vybranými dveřmi a zbylou dvojicí – otevření jedněch z nich je pouze úskok. Auto je pouze jedno. Původní volba rozděluje možné umístění auta mezi dveře vybrané soutěžícím (pravděpodobnost 1/3) a zbylou dvojicí (pravděpodobnost 2/3). Je již známo, že alespoň za jedněmi z této dvojice dveří je koza. Odhalení kozy za jedněmi z nich proto nepřidává soutěžícímu žádnou dodatečnou informaci o jím vybraných dveřích. Odhalení nezmění dvoutřetinovou pravděpodobnost toho, že auto je v prostoru dvojice dveří.

Další možný důvod pro zmatení je, že úloha je často zadána jako kdyby moderátor soutěžícího překvapil otevřením dveří a nabídkou změnit původní volbu. Toto může vyvolat dojem, že moderátor se pokouší zmást soutěžícího, který si vybral správně a že soutěžící neznal pravidla předem. Pokud soutěžící neznal pravidla předem. Pravděpodobnost v konkrétním případě se nezmění, avšak soutěžící nemůže provést optimální volbu, neboť dopředu neví, podle kterých pravidel hraje. Proto je nutné v zadání uvést, že moderátor sdělí soutěžícímu pravidla předem. Tady vidíme, že i příklady na pravděpodobnost staví na informacích, které víme a proto i malá změna v zadání může vést k jiné úloze.