Pomocný text

Binární operace

Úvod

Milí řešitelé,

binární operace je poměrně abstraktní téma, a tak bude občas potřeba odprostit se od konkrétních příkladů a podívat se na věc s určitým nadhledem. Nicméně řešení problémů bývají často velmi hravá. Ač je tento text malinko delší, vyskytuje se v něm jen malé množství teorie - definice binární operace, tři vlastnosti a alternativní pohled na operace pomocí tabulky. Text je pak vyplněn spoustou příkladů a poznámek, které by vám měly usnadnit pochopení problematiky. Pokud nebudete něčemu rozumět, zkuste si text pročíst vícekrát. Chce to vytrvalost, ale jistě se pak vše vyjasní a budete z toho šťastní. Při přetrvávajících nejasnostech se určitě neváhejte obrátit na BrkosTeam nebo lépe přímo na mě. Přeji vám příjemné nabývání nových vědomostí a teď s chutí do toho.

Binární operace

Definice 4.1. *Nechť A je množina. Binární operace na množině A je zobrazení*

$$\circ : A \times A \to A$$

Poznámka. Podívejme se podrobněji na pojmy použité v předchozí definici. $A \times A$ značí kartézský součin množiny A se sebou samou. Pokud jsou $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prvky A, potom prvky kartézského součinu $A \times A$ jsou uspořádané dvojice, např. (a_1, a_1), obecně (a_i, a_j) pro každé i, j, pro která platí $1 \leq i, j \leq n$. Uspořádané znamená, že záleží na pořadí, a proto $(a_i, a_j) \neq (a_j, a_i)$ (rovnost by nastala pouze ve speciálním případě, kdyby platilo $a_i = a_j$). Operace se nazývá binární, protože jejím definiční oborem je kartézský součin $A \times A$. Jinými slovy, každým dvěma prvkům z množiny A přiřadí nějaký prvek z A. Binární operace se většinou neznačí písmeny, ale speciálními symboly jako např.

$$+, -, \cdot, \circ, \bullet, \star, \cap, \cup, \oplus, \odot, \heartsuit, \spadesuit$$

Jestliže $\circ : A \times A \to A$ je binární operace, pak místo $\circ(a_i, a_j)$ (tzv. prefixový zápis) píšeme raději $a_i \circ a_j$ (tzv. infixový zápis). Podívejme se nyní na několik příkladů binárních operací.

Příklad 4.6. Operace $+, -$, $\cdot$, jak je známe, jsou binárními operacemi na $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$. Operace $+$ a $\cdot$ jsou binárními operacemi také na množině $\mathbb{N}$, kdežto operace $-$ není, neboť $3 - 5$ není přirozené číslo. Operace $\div$ není binární operací na $\mathbb{Z}$, neboť např. $1 \div 2$ není celé číslo. Dělení není binární operací ani na $\mathbb{Q}$, neboť dělení nulou není definováno. Můžeme však uvážit množinu $\mathbb{Q} - \{0\}$, na které dělení je binární operací.

Než budeme pokračovat, zkuste si rozmyslet, zda jsou následující operace binární:

1. $a \circledast b = 1$ na $\mathbb{Z}$ (operace $\circledast$ přiřazuje každé dvojici celých čísel číslo jedna)
2. $A \cap B$ na množině konečných podmnožin množiny přirozených čísel, které mají sudý počet prvků
3. $a \star b = a^b$ na $\mathbb{Z}$
4. $a \oplus_3 b$, které dvojici (a, b) přiřadí zbytek z $a+b$ po dělení číslem 3 na množině $\{0, 1, 2\}$
5. $max(a, b)$ na $\mathbb{N}$

Řešení. (ano|ne|ne|ano|ano)

Poznámka. Všimněte si, že $max(a, b)$ je příkladem operace, která se zapisuje prefixově. Na tomto místě bych měl také zmínit, že symbol = nebyl v 1. a 3. případu použit úplně korektně. Správně by se mělo použít := ("definítko"), ale nechtěl jsem méně zkušeným čtenářům působit zbytečný zmatek. Toto zjednodušení se bude objevovat i dále.

Příklad 4.7. Na $\mathbb{Q} - \{0\}$ zaveďme binární operaci $\otimes : a \otimes b = \frac{a^2}{b}$. Kolik je $[(1 \otimes 2) \otimes 3] - [1 \otimes (2 \otimes 3)]$?

Řešení. S operací $\otimes$ nemůžeme pracovat jako s nám známými operacemi + nebo $\cdot$, proto postupujeme zevnitř závorek a vyhodnocujeme jednotlivé operace zvlášť.

$$1 \otimes 2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \otimes 3 = \frac{1}{12}$$

$$2 \otimes 3 = \frac{4}{3}$$

$$1 \otimes \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{12} - \frac{9}{12} = \frac{8}{12} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

Pojďme se nyní podívat na některé vlastnosti binárních operací.

Definice 4.2. *Operace $\circ$ na množině A se nazývá komutativní, jestliže pro libovolné $a, b \in A$*

$$a \circ b = b \circ a$$

a asociativní, jestliže pro libovolné $a, b, c \in A$

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

Poznámka. To, že je operace komutativní, tedy vlastně znamená, že nezáleží na pořadí prvků v této operaci, protože výsledek bude v obou případech stejný. Příkladem komutativní operace může být nám již známé + nebo $\cdot$, definované na $\mathbb{Z}$. Nekomutativní operací může být $-$ na $\mathbb{Z}$. Operace odčítání není komutativní, protože např. $8-2 = 6 \neq -6 = 2-8$

Asociativita nám zase říká, že můžeme libovolně přezávorkovat výraz, který obsahuje pouze danou operaci (proto si většinou můžeme dovolit závorky vynechávat). Opět víme, že sčítání a násobení např. na celých číslech je asociativní. Naopak odčítání na celých číslech asociativní není, neboť např. $(3 - 2) - 1 = 0 \neq 2 = 3 - (2 - 1)$.

Pozor! Pokud operace není asociativní, výraz $a \circ b \circ c$ není jednoznačný, a proto je nutné psát každé operaci závorky.

Příklad 4.8. Podívejme se nyní zpět na **Příklad 4.1**. Které z uvedených operací jsou asociativní a které komutativní?

Řešení. ($\circledast$, $\oplus_3$ a max jsou asociativní i komutativní, ostatní nejsou operace)

Příklad 4.9. Nechť A je množina a $*$ je binární operace na A splňující dvě podmínky:
pro libovolné $x \in A$

$$x = x * x$$

pro libovolná $x, y, z \in A$

$$(x * y) * z = (y * z) * x$$

Dokažte, že $*$ je komutativní.

Řešení. Chceme ukázat, že platí $x * y = y * x$. Začněme tedy s levou stranou. Nejdříve využijeme 1. podmínky, která nám říká, že místo libovolného prvku x ve výrazu můžeme psát $x * x$, tedy i místo y můžeme psát $y * y$, musíme si ale dát pozor na uzávorkování vzniklého výrazu. Dále si uvědomíme, že $(y * y)$ je také prvek množiny A a vzhledem k tomu, že 2. podmínka má platit pro libovolné 3 prvky z A, musí platit také pro $x, x, y * y$. Obdobně pro $x, y * y, x$, čímž se vysvětluje 3. rovnost. Následně využijeme 2. podmínky uvnitř velké závorky pro y, x, y a poté znovu na celém výrazu pro $y * x, y, x$. Nakonec použijeme 1. podmínku (v opačném směru) pro prvek $y*x$, a dostáváme se tak k výsledku.

$$x*y = (x*x)*(y*y) = (x*(y*y))*x = ((y*y)*x)*x = ((y*x)*y)*x = (y*x)*(y*x) = y*x$$

Příklad 4.10. Nechť A je množina a $*$ je binární operace na A splňující pro libovolná $x, y \in S$

$$x * (x * y) = y = (y * x) * x$$

Dokažte, že $*$ je komutativní.

Řešení. $x * y = y * (y * (x * y)) = y * ((x * (x * y)) * (x * y)) = y * x$ (Zkuste nyní vypátrat sami, čeho se kde využije)

Příklad 4.11. Nechť je na $\mathbb{R}$ zadána binární operace $\bullet : x \bullet y = ax + bxy + cy$, kde $a, b, c \in \mathbb{N}$. Ukažte, kdy je operace komutativní a kdy asociativní.

Řešení. Aby $\bullet$ bylo komutativní, musí platit $x \bullet y = y \bullet x$

$$ax + bxy + cy = ay + byx + cy$$

$$ax - ay = cy - cx$$

proto $a = c$.

Aby $\bullet$ bylo asociativní, musí platit $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$ pro libovolné $x, y, z \in \mathbb{R}$. Rozepišme z definice, čemu se rovná pravá a levá strana:

$$x \bullet (y \bullet z) = x \bullet (ay + byz + cz) = ax + bx(ay + byz + cz) + c(ay + byz + cz)$$

$$= ax + abxy + b^2xzy + bcxz + acy + bcyz + c^2z$$

$$(x \bullet y) \bullet z = (ax + bxy + cy) \bullet z = a(ax + bxy + cy) + b(ax + bxy + cy)z + cz$$

$$= a^2x + abxy + acy + abxz + b^2xzy + bcyz + cz$$

můžeme položit levou stranu rovnu pravé a odečíst stejné členy:

$$ax + bcxz + c^2z = a^2x + abxz + cz$$

$$(a - a^2)x + (c - a)bxz + (c^2 - c)z = 0$$

Toto má platit pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$, tedy i pro ta, kde $x = 0, z \neq 0$ a $x \neq 0, z = 0$. Odtud plyne, že $a = c = 1$.

Příklad 4.12. Uvažme operaci z minulého příkladu s konkrétními hodnotami $a = 1$, $b = 1$, $c = -3$, $x \bullet y = x + xy - 3y$. Najděte způsob, jak zapsat číslo 18 pouze pomocí čísla $2, (,)$ a $\bullet$.

Řešení. Máme jen jedinou možnost, jak začít: $2 \bullet 2 = 0$. Vidíme, že pomocí čísla 2 a operace $\bullet$ lze vyjádřit číslo 0, proto můžeme uvážit následující operaci:

$$0 \ \bullet \ 2 = (2 \ \bullet \ 2) \ \bullet \ 2 \ = \ -6$$

Je vidět, že $0 \bullet x = -3x$, proto

$$18 = 0 \bullet -6 = (2 \bullet 2) \bullet ((2 \bullet 2) \bullet 2)$$

Definice 4.3. *Nechť A je množina a $\circ$ je binární operace na A. Prvek $x \in A$ se nazývá idempotentní, jestliže $x \circ x = x$*

Příklad 4.13. Zamyslete se, zda existuje binární operace na nějaké množině, vzhledem k níž jsou všechny prvky dané množiny idempotentní.

Řešení. Takové operace jsme přece už viděli v **Příkladu 4.1**: operace max a $\cap$ (pokud bychom uvážili vhodnou množinu, na níž by $\cap$ byl binární operace).

Příklad 4.14. Nechť $\bullet$ je operace z **Příkladu 4.6**. Všechny prvku budou idempotentní vzhledem k $\bullet$ právě tehdy, když $b = 0$, jedno c, d je rovno 1 a druhé 0.

Poznámka. Jedním ze způsobů, jak znázornit binární operaci, je pomocí tabulky. Nechť $A = \{a, b, c\}$, potom můžeme operaci $\circ : A \times A \to A$ zavést takto:

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Je zvykem, že prvně čteme řádek a až poté sloupec. To znamená, že výsledek operace $c \circ a$ je zapsán v tabulce ve čtvrtém řádku a druhém sloupci a výsledek $a \circ c$ je zápsán ve druhém řádku a čtvrtém sloupci. Takto definovaná tabulka nám dává komutativní binární operaci. Asociativitu bychom museli ověřit pro každou trojici, ale zde ověříme platnost pouze pro trojici a, b, c, tj.

$$(a \circ b) \circ c = b \circ c = a$$

$$a \circ (b \circ c) = a \circ a = a$$

Shodou okolností se nám nabízí ještě jedna možnost, jak ověřit asociativitu operace $\circ$. Pozorný čtenář si jistě všimne, že tato tabulka zadává přesně operaci $\oplus_3$ z **Příkladu 4.1**. O té už jsme ukázali dříve, že je komutativní i asociativní.

Příklad 4.15. Doplňte následující tabulku tak, aby byla operace $\diamond$ asociativní.

$\diamond$	a	b	c
a	b	a	c
b			
c			

Řešení. Protože má být operace asociativní, určitě musí platit

1. $c = a \diamond c = (a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$

   Jediný prvek, pro který platí $a \diamond x = c$, je prvek c, proto $(b \diamond c) = c$

2. $a \diamond (b \diamond a) = (a \diamond b) \diamond a = a \diamond a = b$

   Jediný prvek, pro který platí $a \diamond x = b$, je prvek a, proto $(b \diamond a) = a$

3. $a \diamond (c \diamond c) = (a \diamond c) \diamond c = c \diamond c$

   Jediný prvek, pro který platí $a \diamond x = x$ je prvek c, proto $(c \diamond c) = c$

4. $a \diamond (b \diamond b) = (a \diamond b) \diamond b = a \diamond b = b$

   Jediný prvek, pro který platí $a \diamond x = a$ je prvek b, proto $(b \diamond b) = b$

5. $a \diamond (c \diamond b) = (a \diamond c) \diamond b = c \diamond b$

   Jediný prvek, pro který platí $a \diamond x = x$ je prvek c, proto $(c \diamond b) = c$

6. $a \diamond (c \diamond a) = (a \diamond c) \diamond a = c \diamond a = c$

   Jediný prvek, pro který platí $a \diamond x = c$, je prvek c, proto $(c \diamond a) = c$

$\diamond$	a	b	c
a	b	a	c
b	$a_{(2)}$	$b_{(4)}$	$c_{(1)}$
c	$c_{(6)}$	$c_{(5)}$	$c_{(3)}$

Příklad 4.16. Kolik existuje různých binárních operací na n-prvkové množině? Kolik z nich je komutativních?

Řešení. Do každého políčka tabulky můžeme napsat jedno z n prvků množiny. Políček je celkem n^2, máme tedy n^{n^2} možností, jak tabulku doplnit, proto n^{n^2} operací.

Aby operace byla komutativní, musí být tabulka symetrická podle diagonály vedoucí z levého horního rohu. Proto stačí uvážit všechny možnosti jen pro políčka na diagonále a nad ní. Těch je celkem $n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$. Komutativních operací na n-prvkové množině je tedy $n^{\frac{n^2+n}{2}}$.

Závěr

Snad vás text bavil a všemu jste porozuměli. Hodně štěstí při řešení úloh.

BRKOS Team 2016