Pomocný text

Kombinatorická geometrie

Milí řešitelé, tématem třetí série budou úlohy, u kterých při řešení využijete jak geometrickou představivost, tak kombinatorický způsob dívání se na problémy.

Kombinatorická geometrie jako obor je překvapivě poměrně mladým odvětvím matematiky azabývá uspořádáním konečně mnoha geometrických objektů, bodů, přímek atd., která splňují určité vlastnosti, např. součet vzdáleností je minimální, mnohoúhelníky jsou konvexní, body leží na mřížce. Své využití nachází v počítačové grafice či prostorovém modelování v rámci výpočetní geometrie, která hledá algoritmy pro řešení geometrických problémy.

Užitečné kombinatorické techniky

Dirichletův princip

zvaný též přihrádkový princip či princip holubníku

Věta 3.2. *Nechť máme $mn+1$ brkosáků v n přihrádkách, pak je alespoň v jedné přihrádce alespoň $m+1$ brkosáků.*

Důkaz. Pokud by v každé z n přihrádek bylo nanejvýš m brkosáků, pak bychom měli dohromady nanejvýš mn brkosáků, což je spor.

Mnohdy je těžké určit, co jsou ty přihrádky a co brkosáci. Uveďme si několik příkladů.

Příklad 3.7. Tabulka $6 * 6$ je zaplněna čísly $0, 1a - 1$. Sečteme čísla v každém řádku, sloupci a obou úhlopříčkách. Dokažte, že některé dva se rovnají.

Řešení. Celkem máme 14 výsledků, které nabývají celočíselných hodnot od -6 do 6, tedy mají 13 možností, jak mohou vyjít. Alespoň jedna možnost je tedy využita alespoň dvakrát.

Příklad 3.8. Pět bodů jsou body celočíselné mřížky, tedy jsou to body o celočíselných souřadnicích. Dokažte, že střed spojnice některých bodů je také bodem této mřížky.

Řešení. Uvažme zbytky souřadnic bodů po dělení dvěma. Dostaneme čtyři skupiny bodů: $(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)$. Střed spojnice dvou bodů bude mít souřadnice rovné aritmetickému průměru souřadnic krajních bodů. Pokud, budou oba krajní body ve stejné skupině, bude mít střed celočíselné souřadnice. Máme čtyři skupiny a pět bodů, tedy v nějaké skupině budou alespoň dva body.

Příklad 3.9. Ve čtverci o obsahu 9 máme deset bodů, dokažte, že alespoň dva jsou od sebe nanejvýš o $\sqrt{2}$.

Obarvování šachovnice

se často používá při důkazu tvrzení, že něco nelze pokrýt útvary určitého tvaru. Stěžejní pro nás obvykle je porovnání počtu černých a bílých políček, případně parity jejich počtu.

Příklad 3.10. Kolika způsoby lze šachovnici 8×8, které jsme usekly dva protilehlé rohy, pokrýt dominovými kostkami?

Řešení. Žádným. Všimněme si, že každá dominová kostka zakryje právě jedno bílé pole a jedno černé pole. Požadované pokrytí by tedy znamenalo, že 31 bílých polí a 31 černých polí leží pod dominovými kostkami. Na šachovnici bez protilehlých rohů je však 30 černých polí a 32 bílých nebo naopak.

Někdy si řešitelé musí šachovnici sami obarvit, nebo dokonce sami vytvořit.

Příklad 3.11. Mějme obdélník vydlážděný kostkami 2×2 a 4×1. Jedna se nám rozbila a my máme k dispozici náhradní kostku, avšak druhého tvaru. Zvládneme kostky přeskládat, abychom pomocí náhradní kostky opět pokryli celý obdélník?

Řešení. Uvažme obarvení, kdy každý druhý řádek necháme prázdný a v každém ze zbývajících řádku obarvíme pouze každé druhé políčko. Pak kostka tvaru 2×2 bude při pokrytí obdélníku zakrývat vždy právě jedno zabarvené políčko, tedy lichý počet, kdežto kostka tvaru 4×1 bude zakrývat buď dvě, nebo žádné zabarvené políčko, tedy sudý počet. Jedna kostka daného tvaru tedy není zaměnitelná s kostkou druhého tvaru.