Pomocný text

Teorie her

Milí řešitelé,

první čtyři úlohy každé série spojuje jisté téma a vám bude poskytnut text, který vás tímto tématem mírně provede a pomůže vám při řešení těchto úloh.

Teorie her, již jsme zvolili za téma druhé série, je odvětví matematiky zabývající se optimálním řešením všemožných konfliktů mezi alespoň 2 stranami. Výsledkem bádání by pak měla být co nejlepší strategie pro jednu, nebo více stran. Teorie her má aplikaci nejen v ekonomii, ale i např. biologii či sociologii.

Cílem této teorie je hru zanalysovat a určit, zda některý z hráčů má výherní / neprohrávající strategii a případně ji i nalézt. Strategií je nějaký postup, dle kterého se lze v každé pozici ve hře rozhodnout, který tah použít, a to jednoznačně.

Klasifikace

Protože her je celá spousta a různé typy her se řeší různými přístupy, klasifikujeme hry podle některých kritérií:

1. Dle součtu:
   - **Hry s nulovým součtem** hráči vyhrají na úkor ostatních. Celkový zisk ze hry všech hráčů je tak roven nule. Příkladem je poker, ale i šachy.
   - **Hry s nenulových součtem** je možné, že všichni budou mít ze hry užitek, a naopak, že všichni prodělají. Příkladem je například známé vězňovo dilema nebo ekonomika, kde si mohou škodit podniky navzájem.
2. Dle informací:
   - **Hry s úplnými informacemi** všichni hráči mají stejné informace o stavu hry a ty jsou úplné, tedy kompletně tento stav definují. Tedy v případě "rozbití hracího plánu" jej dokáží dokonale zrekonstruovat (včetně např. i odhazovacího a dobíracího balíčku). Příkladem opět šachy. Naproti tomu žolík, i pokud si hráči vidí do karet, nikoliv, neboť pořád neznají pořadí karet v dobíracím balíčku.
   - **Hry s neúplnými informacemi** hráči mají buď nestejné informace nebo neúplné ve smyslu jednoznačnosti stavu hry.
3. Dle konečnosti:
   - **Konečná** každá hra (partie) skončí po konečném počtu tahů (nelze hrát do nekonečna a to ať hrají hráči jakkoli). Příkladem je třeba Tic Tac Toe.

- **Nekonečná** existuje taková kombinace strategií, že jimi hraná partie nikdy nedojde do koncové pozice. Příkladem jsou třeba piškvorky na nekonečném poli.

Nestranné konečné kombinatorické hry

Jednou ze tříd her jsou takzvané kombinatorické hry, které si nyní popíšeme. Jsou to hry dvou hráčů s úplnými informacemi, bez náhody. Hra je určena stavy, ve kterých se může nacházet (a zpravidla je jich konečně mnoho). Je definován jeden startovní stav a množina koncových stavů. Hráči se pravidelně střídají. Dosažením koncového stavu končí hra. Podle verse hry buď vítěztvím hráče, který hrál naposledy (*normální hra*), vítězstvím hráče, který už nemůže hrát (*nuzná hra*).

Pokud jsou oběma hráčům dostupné stejné tahy (pokud se hra nachází v určitém stavu, tak stavy, do kterých lze přejít, jsou pro oba stejné) řekneme, že hra je **nestranná**.

Příkladem kombinatorické hry jsou šachy. Oba hráči vidí celou hrací desku, kam chce hráč táhnout, tam táhne, stavy hry jsou možná rozestavení šachovnice a přechody mezi stavy jsou tahy povolené šachovými pravidly. Koncové stavy jsou ta rozestavení šachovnice, kde jeden hráč druhému dává mat či nastává pat. Počáteční stav je samozřejmě počáteční rozestavení figurek. Tato hra ovšem není nestranná, neboť černý jede černými a bílý bílými.

Strategie se poté dá s výhodou definovat jako funkce f z množiny stavů do množiny stavů, kde platí pro všechny stavy x, že $x \to f(x)$ je tah povolený pravidly.

Základní metodou řešení konečných nestranných kombinatorických her je metoda **P-N- stavů**. N-stav je takový stav, ze kterého, pokud se v něm hráč ocitne, existuje vítězná strategie (nezáleže na hře hráče). P-stav je takový stav, který nevede do žádného jiného stavu než P-stavu.

Z konstrukce přiřazení P- a N- jednotlivým stavům bude jasné, že každý stav má právě jedno z těchto písmenek (budeme uvažovat normální hru, pro nuznou obdobně):

1. označíme všechny koncové stavy jako P-stavy (hráč, který se dostal do tohoto stavu už nemůže hrát a tedy prohrál).

2. označíme stavy, ze kterých vede alespoň jeden tah do P-stavu jako N-stav (vítězná strategie je samozřejmě provést tento tah, čímž soupeř bude v P-stavu a musí táhnout opět do N-stavu, nebo prohrát, pokud je stav koncový).

3. označíme stavy, ze kterých vedou tahy pouze do N-stavů jako P-stavy.

4. body 2 a 3 opakujeme, dokud lze, poté zbydou pouze nedosažitelné stavy. Počáteční mezi nimi být nemůže, jinak by hra nebyla konečná.

Vzhledem ke konečnému počtu stavů je tento postup zcela korektní a skutečně všechny dosažitelné stavy (a možná i některé nedosažitelné) opísmenkuje (rozmyslete si).

Ilustrujme na příkladu velmi jednoduché klasické hry na odebírání sirek:

Příklad 2.1. Mějme 6 sirek. Každý hrač na tahu musí odebrat 1, nebo 2 sirky. Prohrává hráč, jenž již nemůže odebrat žádnou sirku. Určete, zda má některý z hráčů vítěznou strategii a jakou.

Jako P-stav označíme jediný konečný stav, t. j. **0** sirek. Do něj nyní vedou 2 stavy, a to **1** a **2** sirky. Ze stavu **3** můžeme odebrat buď jednu nebo dvě sirky a tím se dostat do stavů **2** nebo **1** Stav **3** je tedy P-stav. Stavy **4** a **5** jsou tedy opět N-stavy a stav **6** opět P-stav.

Vítěznou strategii má tedy druhý hráč. Prvním tahem odebere tolik sirek, aby zůstaly 3 a 2. tahem svým vyhraje.

Důležitým důsledkem věty o P- a N- stavech je, že každá nestranná konečná kombinatorická hra má vítěznou strategii pro některého z hráčů.

Podívejme se nyní na jiný příklad a vyřešme jej.

Příklad 2.2. Mějme m a n sirek na dvou hromádkách. Hráč si ve svém tahu vybere jednu hromádku a odebere z ní alespoň jednu sirku (maximálně všechny). Hráč, který nemůže táhnout, prohrál. Nalezněte vítěznou strategii pro jednoho z hráčů.

Samozřejmě i tento příklad by šel řesit metodou P- N- stavů. My ale využijeme jinou často používanou metodu **párování tahů**. Zde zpravidla existuje vítězná strategie, která kopíruje tahy soupeře.

Podívejme se, jak by měl postupovat druhý hráč, pokud $m = n$. Pak zjevně první hráč odebráním k sirek z jedné hromádky (bez újmy na obecnosti první) dostane hru do stavu $n - k, n$. Druhý hráč tedy odebráním k sirek z druhé hromádky opět srovná počty sirek v obou hromádkách a stav je $n - k, n - k$. Za nejpozději $2k$ tahů je tedy stav $0, 0$ a druhý hráč vyhrává.

Pokud tedy $m \neq n$ (bez újmy na obecnosti $m > n$), pak první hráč odebere z první hromádky $m-n$ sirek a tím se dostane do pozice druhého hráče za stavu n, n, což je P-stav.

Přikládáme zde ještě jednu proslulou hru na procvičení párování (samozřejmě není kombinatorická):

Příklad 2.3. 2 loupežníci chtějí umístit mince na stůl tak, aby se nepřekrývaly. Střídají se v umisťování, prohrává ten, který už nemůže umístit další minci. Který z nich má vítěznou strategii a jakou? Nezapomeňte na střed stolu!

Nim

Asi by vás zajímalo, jak by dopadl příklad 2.2 pro více než 2 hromádky. Samozřemě je možné stále procházet všechny stavy, jejich počet ale roste exponenciálně (hodně rychle) vzhledem k počtu hromádek. Pojďme tedy najít jiný způsob určování P- a N- stavů, aniž bychom museli předpočítávat všechny menší.

Poznámka. Na tomto místě si dovolíme malou odbočku. Definujeme operaci takzvaného nim-součtu ($\oplus$) nezáporných celých čísel. Ten funguje tak, že zapíšeme obě čísla v binární soustavě a poté provedeme operaci XOR na každé pozici. Výsledkem XOR je 1, pokud je právě jedna z číslic 1 a druhá 0, jinak vrací 0. Např. nim-součet 9 a 12:

$$9 \oplus 12 = 1001 \oplus 1100 = 0110 = 6$$

Snadno bychom se přesvědčili, že nim-součet je asociativní, má tedy cenu jej závádět nejen pro dvojice, ale i pro n-tice čísel.

Definujme tedy přesně, co myslíme hrou Nim:

Příklad 2.4. Hra Nim je hra dvou hráčů. Je složena z $k \in \mathbb{N}$ hromádek o $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ kamenech. Ve svém tahu si hráč vybere jednu hromádku ve odebere z ní jeden až všechny kameny. Hráči se vždy po tahu střídají. Hra končí, když na žádné hromádce nejsou kameny. Vyhrává hráč, který naposledy táhnul.

Pro $k = 2$ již máme vyřešeno. Pro vyšší k bychom ale s tímto přístupem nevystačili. Proto si zavedem silnější označení stavů než pouze binární P- N-.

Vyslovíme nejdůležitější větu celého textu:

Věta 2.1 (Bouton)**.** *Hra Nim se nachází v P-stavu právě tehdy, když nim-součet počtu kamenů v jednotlivých hromádkách je roven 0.*

Důkaz. Důkaz povedeme tak, že jednotlivé kroky konstrukce P- a N- stavů budeme kontrolovat, zda námi definované pravidlo tento postup splňuje.

1. koncový stav je jediný a jsou to samé 0. Dle definice Nimu je to P-stav. Stačí tedy ověřit, že má nim-součet počtů kamenů hodnotu 0. To je ale pravda, neboť nim-součet k nul je pořád 0 $(0 \oplus (0 \oplus (0 \oplus \cdots \oplus 0) \dots) = 0)$

2. nyní chceme ukázat, že se do stavů s nim-součtem 0 dostanu ze každého stavu s nim-součtem nenulovým. To je ale jednoduché, podívejme se v binárním zápise na zleva první 1 a její řád si zapamatujme. Nyní se podívejme na jednu z hromádek, která má počet kamenů takový, že na tomto řádu má také 1 (alespoň jedna taková musí existovat, jinak by byla v nim-součtu 0 v tomto řádu). Odebereme z této hromádky takový počet kamenů, aby byl nim-součet roven 0. To se nám určitě povede, řády vlevo od nalezeného řádu neměníme a nalezený řád je nejvyšší a my na místo 1 chceme napsat 0. Počet kamenů tedy určitě klesne.

3. ukážeme, že ze stavu s nim-součtem 0 nevede tah do jiného stavu s nim-součtem 0. To je ale také zřejmé, když si uvědomíme, že $k - 1$ počtů kamenů na bezezbytku určuje, jaký musí být počet kamenů v poslední hromádce, aby byl nim-součet 0. Pokud tedy už nim-součet 0 je, pak změnou počtu kamenů v jedné hromádce určitě tento nim-součet pokazíme.

Tím jsme tedy ukázaly, že skutečně stavy s nulovým nim-součtem odpovídají P- stavům a s nenulovým N- stavům.

Všimněme si, že pro $k = 2$ tvrzení odpovídá již nám známému, neboť dvě čísla mají nulový nim-součet právě, když jsou stejná.

Pokud jste třeba zcela nepochopili důkaz nezoufejte, ukážeme si postup na příkladu:

Příklad 2.5. Mějme trojhromádkový nim ($k = 3$) s počáteční pozicí $(6, 30, 18)$. Určete, zda je to P- nebo N- stav a v případě N-stavu najděte tah do P-stavu.

Spočítáme nim-součet:

$$6 \oplus 30 \oplus 18 = 00110 \oplus 11110 \oplus 10010 = 01010 = 10$$

takže dle Boutonovy věty se jedná o N-stav. Abychom našli tah do P-stavu, podíváme se na nim-součet. Ten má nejlevější 1 v řádu 8 (2^3). Podíváme-li se do hromádek, zjistíme, že jediná hromádka, která má jedničku v řádu v řádu 8 je hromádka se 30 kameny. Vidíme, že další jednička v nim-součtu je v řádu 2. Chceme tedy, aby se ze 30 stalo číslo, které má na místě 8 a 2 opačné číslice, než mělo: $1\mathbf{1}11\mathbf{1}0 \to 1\mathbf{0}10\mathbf{0}0 = 20$

Chceme tedy odebrat 9 kamenů ze 2 hromádky.

Pro kontrolu můžeme provést nim-součet nastané pozice:

$$6 \oplus 21 \oplus 18 = 00110 \oplus 10100 \oplus 10010 = 00000 = 0$$

Důvod, proč nás hra Nim tak zajímá je ten, že velký počet nestranných (i některé stranné) kombinatorických her se dá na tuto hru převést. Ukážeme si jednu takovou.

Příklad 2.6. Mějme šachovnici $n \times n$ a na jejích polích umístěny mince. Může být i více než jedna mince na jednom poli. Hráči se pravidelně střídají. Hráč ve svém tahu vezme minci a posune ji buď doleva, nebo dolů o libovolný počet polí, aby zůstal na šachovnici. Hráč, který nemůže jet, prohrál (všechny mince jsou v levém dolním rohu).

Snadno si rozmyslíme, že každá mince mince představuje dvě hromádky Nimu. Při m mincích tak vlastně jde o Nim s $2m$ hromádkami. Tah dolů mincí je ubírání z jedné hromádky a tah doleva ze druhé.

Na internetu zajisté najdete ještě desítky jiných her převeditelných na Nim, proto nemá cenu je zde vypisovat.

Tím se s vámi také loučí tento studijní text. Snad vám bude nápomocen nejen při řešení úloh. Hodně štěstí!