Pomocný text

Nerovnosti

Milí řešitelé,

tento text vás uvede do široké palety matematických úloh souhrnně nazvaných nerovnosti. Jde o úlohy vcelku oblíbené na soutěžích olympiádního typu, přesto je jim ve standardní výuce věnováno jen minimum času nebo se o nich ve škole nedovíte vůbec. V povídání si nejprve ukážeme, co to vlastně nerovnosti jsou, a naučíme se je řešit. Začneme těmi úplně jednoduchými a dostaneme se až k mírně pokročilým a pokročilým. Nerovnosti jsou ale orhomně široké a bohaté téma a není vůbec v našich silách pokrýt vše, co by se o nich dalo říci. Neváhejte tak obrátit se také na další zdroje i mimo tento pomocný text.

Úvod

Ve výuce jste se už nejspíš setkali s nerovnicemi. Nenechte se ale zmýlit podobou názvů, nerovnosti a nerovnice jsou hodně odlišné pojmy. Z určitého úhlu pohledu jsou nerovnosti dokonce úplný opak nerovnic. Nerovnice je úloha, na jejímž začátku je výraz typu $A(x) < B(x)$ (případně $>$, $\leq$, nebo $\geq$) a postupně se různými úpravami, úvahami a zpravidla rozborem možností dopracujete k množině M čísel x (obvykle podmnožina reálných čísel), která původní nerovnici vyhovují. Mohou se pak objevit také obecnější příklady, kdy porovnáváme například výrazy závisející na více proměnných, máme zadáno více nerovnic současně atd.

Nerovnost funguje přesně opačně. Na začátku je obvykle zadaná nějaká množina (také jde obvykle o podmnožinu reálných čísel, často půjde o kladná reálná čísla) a cílem je dopracovat se úpravami a úvahami k platné nerovnosti. Tento rozdíl nejlépe ilustrujeme příkladem:

Příklad 1.1. Dokažte, že pro všechna kladná reálná x, y platí $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Řešení. Protože x i y jsou kladná reálná čísla, $\sqrt{x}$ a $\sqrt{y}$ existují a jsou také kladná a reálná. Navíc kvadrát reálného čísla je nezáporné reálné číslo, takže určitě platí

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0.$$

Roznásobením a převedením na druhou stranu získáme $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, což po vydělení dvěma dává námi dokazovanou nerovnost.

Nástroje

Kovář umí ukovat meč, i když k tomu nemá všechna potřebná kladiva, kovadliny a další nástroje a stejně tak i nerovnosti lze dokázat od základních principů. Nicméně když má člověk potřebné nástroje, jde to vše hned lépe, rychleji, snáze a přirozeněji. A to platí jak u kovářství, tak i v matematice. Narozdíl od kovářů vám ale můžeme potřebné nástroje předat slovně v pár odstavcích textu, takže se do toho dáme.
Nástroje na řešení nerovností mají obvykle tvar nějaké obecně platné nerovnosti. Používají se tak, že vhodnou volbou jednotlivých proměnných v obecné nerovnosti obdržíme námi dokazovanou nerovnost. Například pokud bychom chtěli dokázat, že pro kladné reálné číslo x platí, že $x + 1/x$ je vždy větší roven dvěma, stačí v předchozím příkladě za y dosadit $1/x$ a dokazovaná nerovnost je na světě.
S prvním (a dle mého názoru asi nejmocnějším) nástrojem na řešení nerovností jsme se setkali už v prvním příkladě. Je to nerovnost $x^2 \geq 0$, která platí pro všechna reálná x. Pojďme si dále uvést některé méně zřejmé.

Nerovnosti mezi průměry

Nechť $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ jsou kladná reálná čísla. Jejich průměr stupně k je definován jako

$$\bar{x}_k = \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k}{n}}.$$

Všimněte si, že pro $k = 1$ jde o klasický aritmetický průměr těchto čísel. Dále průměr stupně 2 se nazývá kvadratický a průměr stupně -1 harmonický. Obecně je tento výraz je dobře definovaný pro všechna reálná k kromě nuly. Průměr stupně 0, který se nazývá geometrický, se definuje zvlášť jako

$$\bar{x}_0 = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}.$$

Z těchto výrazů je snadno vidět, že takto definovaný průměr (libovolného stupně) má skutečně očekávané vlastnosti průměrů. Tedy, že se nachází někde mezi největší a nejmenší hodnotou. Pro takto definované průměry platí tzv. nerovnost mezi průměry:

Věta 1.1. *Nechť $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ jsou kladná reálná čísla. Dále nechť k, l jsou reálná čísla splňující $k < l$. Pak platí*

$$\bar{x}_k \leq \bar{x}_l,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Důkaz. Nejprve předpokládejme $k > 0$. Chceme dokázat, že pro $k < l$ platí

$$\sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k}{n}} \leq \sqrt[l]{\frac{x_1^l + x_2^l + \cdots + x_n^l}{n}}$$

Nerovnost ekvivalentně upravíme (pouhé umocnění na l a kosmetické úpravy exponentů) do tvaru

$$\left(\frac{x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k}{n}\right)^{\frac{l}{k}} \leq \frac{(x_1^k)^{\frac{l}{k}} + (x_2^k)^{\frac{l}{k}} + \cdots + (x_n^k)^{\frac{l}{k}}}{n}.$$

Tohle je nerovnost, jejíž platnost je zřejmá užitím tzv. Jensenovy nerovnosti pro (konvexní) funkci $x^{\frac{l}{k}}$ a body $x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k$. Pokud nevíte, co je Jensenova nerovnost, nelamte si s tím

zatím hlavu, dostaneme se k ní později v tomto textu.
Podobným způsobem se dokáže případ, kdy $l < 0$. Snadno nahlédneme, že pak už zbývá dokázat jen případy $k = 0$ a $l = 0$, protože zbylé případy získáme použitím tranzitivity nerovnosti (tj z $A \leq BaB \leq C$ plyne $A \leq C$). Dokážeme případ $k = 0$, ten druhý by se opět dal dokázat analogicky. Chceme tedy dokázat pro $k > 0$:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \sqrt[k]{\frac{x_1^k + \dots + x_n^k}{n}}$$

Ekvivalentně upravíme (umocněním na kladné k) do tvaru

$$\sqrt[n]{x_1^k \cdot \dots \cdot x_n^k} \leq \frac{x_1^k + \dots + x_n^k}{n}$$

Nyní na obě strany nerovnosti použijeme funkci přirozený logaritmus (ln). Je to funkce rostoucí, takže pokud $x \leq y$, pak také $\ln x \leq \ln y$, a navíc jde o logaritmus, který má tu zajímavou vlastnost, že $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ (takže také $\ln x^n = n \ln x$). Aplikací zmíněných vlastností získáme ekvivalentními úpravami

$$\frac{\ln x_1^k + \ln x_2^k + \dots + \ln x_n^k}{n} \leq \ln\left(\frac{x_1^k + \dots + x_n^k}{n}\right),$$

což je opět nerovnost, která přímo vyplývá z Jensenovy nerovnosti, tentokrát pro funkci přirozený logaritmus (která je konkávní), ale stejnou n-tici čísel.

Speciální a obecně známý případ je nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (tzv. AG–nerovnost). Její variantu pro pouhé dvě proměnné jsme si dokázali v úvodním příkladu.

Nerovnost mezi průměry platí i v případě tzv. váženého průměru. Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou kladná reálná čísla a $a_1, a_2, \dots, a_n$ také kladná reálná čísla, tzv. váhy. Pak vážený průměr stupně k je dán výrazem

$$\bar{x}_k = \sqrt[k]{\frac{a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + \dots + a_n x_n^k}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}}.$$

Je vidět, že pokud budou všechny váhy stejné, dostaneme obyčejný průměr stupně k. Pokud by například první váha byla dvakrát větší než všechny ostatní, bylo by to, jakobychom k n-tici hodnot přidali ještě jednou x_1. Podobně se průměry chovají i v obecném případě: převedením na společného jmenovatele a rozdělením na součty jednotlivých hodnot bychom nerovnost dokázali pro všechny racionální váhy. Pro ty iracionální bychom argumentovali určitou podmínkou spojitosti (pokud nerovnost platí pro libovolně blízké racionální váhy, musí platit také pro iracionální), jejíž důkladný rozbor je nad rámec tohoto textu, ale intuitivní význam je snadno pochopitelný.

Homogenní nerovnosti

Poměrně velká škála nerovností, se kterými se setkáte v úlohách, patří mezi tzv. homogenní nerovnosti. Tato vlastnost umožňuje klást na jednotlivé proměnné (bez újmy na obecnosti) další dodatečné podmínky a zjednodušit tak řešení. Co tedy znamená, že je nerovnost homogenní?

Homogenní nerovnost je nerovnost mezi dvěma homogenními výrazy téhož stupně. To jsme tomu pomohli, že? Ale homogenní výraz stupně k není nic složitého. Je to zkrátka výraz $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ splňující pro každé $t \in \mathbb{R}^+$, že

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Co nám to umožňuje? Uvažme nerovnost (například "$<$") mezi výrazy f a g pro nějakou n-tici čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, neboli

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Pak protože jsou výrazy homogenní téhož stupně k, můžeme nerovnost vynásobit kladným t^k a získat

$$t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < t^k g(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) < g(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n).$$

Nyní vidíme, že nerovnost platí pro původní n-tici právě tehdy, když platí také pro n-tici $tx_1, tx_2, \ldots, tx_n$. K čemu je to tedy dobré? Uvedeme si příklad. A když už tak už. Dokážeme s využitím homogenity tzv. Cauchy-Schwarzovu nerovnost, další ze silných nástrojů k řešení nerovností.

Cauchyho-Schwartzova nerovnost

Nechť jsou dány dvě n-tice reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Pak platí

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$$

Všimněme si, že nerovnost je v obou n-ticích homogenní stupně 1. Pokud je jedna z n-tic celá nulová, nerovnost platí triviálně. Pokud je alespoň jeden člen každé n-tice nenulový, určitě existují taková kladná reálná čísla s a t, že $\sqrt{(sx_1)^2 + (sx_2)^2 + \cdots + (sx_n)^2} = s\sqrt{x_1^2 + x_2^+ \cdots + x_n^2} = 1$ a $\sqrt{(ty_1)^2 + (ty_2)^2 + \cdots + (ty_n)^2} = t\sqrt{y_1^2 + y_2^+ \cdots + y_n^2} = 1$. Stačí tedy, pokud dokážeme Cauchyho-Swartzovu nerovnost pro takovéto n-tice, všechny ostatní umíme získat vhodnou volbou koeficientů s a t.
Dokazujeme nyní

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \leq 1$$

za podmínky

$$x_1^2 + x^2 + \cdots + x_n^2 = 1, \qquad y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 1.$$

To je ale jednoduché, protože platí:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 = \\ &\quad x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2 + \cdots + x_n^2 - 2x_ny_n + y_n^2 \\ 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) &\leq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 2 \\ x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n &\leq 1 \end{aligned}$$

Tím je důkaz u konce. Uveďme ještě druhý, který vám možná pomůže si CS nerovnost zapamatovat. V nerovnosti lze totiž rozpoznat výrazy týkající se vektorů. V levé straně poznáváme skalární součin vektorů $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, zatímco pravá strana je součin jejich velikostí. Ti z vás, kteří se s vektory již setkali možná také ví, že označíme-li úhel mezi těmito vektory α, pak platí

$$\cos \alpha = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$$

a protože $\cos \alpha$ je vždy menší než 1, dostáváme z této rovnosti rovnou naši CS nerovnost.

Jensenova nerovnost

Dostáváme se k dalšímu nástroji a to je Jensenova nerovnost, kterou jsme zmínili již dříve. Nejprve pár pojmů. Útvar je konvexní, pokud s každými dvěma jeho body leží uvnitř něj i úsečka tyto body spojující. A o funkci řekneme, že je konvexní na daném intervalu, pokud je konvexní útvar nad grafem této funkce omezený daným intervalem. Pokud je naopak konvexní útvar pod grafem na tomto intervalu, řekneme o funkci, že je konkávní. Například funkce $f(x) = x^2$ je na celých reálných číslech konvexní. $f(x) = \frac{1}{x}$ je na kladných reálných číslech konvexní a na záporných reálných číslech konkávní.
Teď už k samotné nerovnosti. Nechť funkce $f(x)$ je konvexní na intervalu I. Nechť dále $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ jsou čísla v tomto intervalu a $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ jsou váhy. Pak platí

$$f\left(\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}{a_1 + \cdots + a_n}\right) \leq \frac{a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + a_nf(x_n)}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

V levé straně poznáváme funkční hodnotu váženého aritmetického průměru, napravo pak máme vážený průměr funkčních hodnot. Budeme postupovat matematickou indukcí. Bez újmy na obecnosti pro další postup předpokládejme, že součet vah je 1. Z vlastnosti konvexity funkce snadno získáváme

$$f(ax + (1-a)y) \leq af(x) + (1-a)f(y).$$

Dál předpokládejme, že nerovnost platí pro nějaké n. Pak

$$\begin{aligned} f(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1}) &= \\ f\left((1-a_{n+1})\left(\frac{a_1}{1-a_{n+1}}x_1 + \cdots + \frac{a_n}{1-a_{n+1}}x_n\right) + a_{n+1}x_{n+1}\right) &\leq \\ (1-a_{n+1})f\left(\frac{a_1}{1-a_{n+1}}x_1 + \cdots + \frac{a_n}{1-a_{n+1}}x_n\right) + a_{n+1}f(x_{n+1}) &\leq \\ a_1f(x_1) + \cdots + a_nf(x_n) + a_{n+1}f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov. Pokud je funkce konkávní, platí v nerovnosti znaménko opačně.

Další nerovnosti

Tímto bychom rádi naše stručné povídání ukončili. Nerovností, které lze vhodně použít jako nástroje k řešení je samozřejmě daleko více. Můžete si najít například mincovou nerovnost, Muirheadovu nerovnost, Čebyševovu nerovnost a mnohé další. Věříme, že vám tento text pomůže vyřešit nejen úlohy šesté série, ale také všechny další nerovnosti, se kterými se na matematických soutěžích setkáte.

BRKOS Team 2016