Pomocný text

Polynomy

Milí řešitelé,

cílem tohoto povídání je naučit vás, jak se vypořádat s polynomy. V úvodu rychle proletíme základní pojmy, které jistě většina z vás už zná. Naučíme se různé metody na hledání kořenů, rozebereme Vietovy a Newtony vzorce, procvičíme Hornerovo schéma. Na závěr každé části čeká pár úloh na procvičení.

Úvod

Nejprve si musíme říct, co to polynom je. Funkci $P(x)$ nazveme polynomem, jestliže je tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_n \neq 0$. Čísla $a_0, \ldots, a_n$ nazýváme **koeficienty** polynomu a n je jeho **stupeň**. Může se samozřejmě stát $n = 0$, tedy $P(x) = a_0$. Tento polynom nazýváme konstantní. Pro různé potřeby si ještě dodefinujeme nulový polynom $P(x) = 0$.
Polynom charakterizují i jeho **kořeny**, tedy taková r, pro která $P(r) = 0$.
Právě v souvislosti s kořeny polynomu se častěji používá pro práci s polynomem takzvaný **součinový tvar**. Nazýváme tak vyjádření polynomu jako součin členů $(x - r)$, kde r je kořen polynomu. Například si vezměme polynom $x^2 - 3x + 2$, u kterého snadno uhádneme kořeny $-1, -2$ (Pokud jste neuhádli, nevěšte hlavu, naučíme se). Na základě toho mohu polynom vyjádřit jako $x^2 - 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$. Čtenář tedy už tuší, že pro obecný polynom platí

$$P(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n),$$

kde $r_1, ..., r_n$ jsou kořeny $P(x)$. Pokud se nějaký kořen vyskytuje v součinu vícekrát, pak ho nazýváme **násobný kořen**. Někteří z vás možná zpozorněli nad počtem kořenů. Jak víme, že počet kořenů je n? Řekla nám to **Základní věta algebry**[1]:

ZVA. Každý polynom stupně n má právě n komplexních kořenů, počítáme-li každý tolikrát, jaká je jeho násobnost.

Trochu jsme vám tedy zatajili, že $r_1, \ldots, r_n$ v součinovém tvaru nemusí být nutně reálná čísla. Koho vyděsily komplexní kořeny ať se netrápí, v celém textu budeme řešit jen polynomy s reálnými koeficienty a jejich komplexní kořeny nebudeme uvažovat. Přesto si ale něco ze základní věty algebry odneseme.

[1] Důkaz této věty je vysoko nad rámec tohoto textu, ale sběhlým v práci s komplexními čísly by neměl činit potíže (viz věta o chlupaté kouli).

Důsledek. Každý nenulový polynom stupně n má nejvýše n reálných kořenů

Příklad 1.1. Polynom $P(x)$ splňuje $x^{23} + 23x^{17} - 18x^{16} - 24x^{15} + 108x^{14} = (x^4 - 3x^2 - 2x + 9) \cdot P(x)$ pro všechna x. Najděte součet koeficientů polynomu $P(x)$.

Návod. Stačí si uvědomit, že součet koeficientů polynomu je jeho funkční hodnota v $x = 1$.

Příklad 1.2. Dokažte, že $a_0 = (-1)^n \cdot a_n(r_1 r_2 \cdots r_n)$

Návod. Využijte součinový a obecný tvar polynomu.

Pro ty, které zaujal vztah v příkladě 2, je nachystaná další kapitola.

Vietovy vztahy

Začneme tím, že si nadefinujeme k-symetrickou sumu. Prvky každé k prvkové podmnožiny množiny M vynásobíme a tyto součiny sečteme. Tuto sumu nazýváme k-symetrická suma a značíme ji σ_k. Pro představu, nechť $M = \{x, y, z, w\}$,pak:

$$\sigma_1 = x + y + z + w$$

$$\sigma_2 = xy + yz + zx + wx + wz + wy$$

$$\sigma_3 = xyz + yzw + zxw + wxy$$

$$\sigma_4 = wxyz$$

Vezměme si polynom $P(x)$ a jeho kořeny $r_1, \ldots, r_n$. Z obecného tvaru polynomu jasné, že každý polynom je jednoznačné daný pomocí jeho koeficientů. Ze součinového tvaru zase vidíme, že i kořeny nám téměř úplně charakterizují polynom. Zdá se tedy, že mezi kořeny a koeficienty polynomu je nějaká pevná závislost. Této závislosti říkáme Vietovy vztahy. Spousta z vás už zná Vietovy vztahy, zpravidla ve tvaru:

$$a_{n-1} = -a_n(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)$$

$$a_{n-2} = a_n(r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots + r_{n-1} r_n)$$

$$\vdots$$

$$a_0 = (-1)^n a_n r_1 r_2 \cdot \cdots \cdot r_n$$

Se symetrickou sumou vám ale můžu představit Vietovy vztahy v kapesní formě:

$$a_{n-k} = (-1)^k a_n \sigma_k,$$

kde σ_k je k-symetrická suma množiny $r_1, \ldots, r_n$.

Důkaz. Veďme důkaz indukcí vzhledem k n. Nechť $n = 1$, pak polynom $P(x) = a_1 x + a_0$ má zřejmě jediný kořen $\frac{-a_0}{a_1}$. Pro $k = 1$ tedy dostáváme $\sigma_1 = \frac{-a_0}{a_1}$, a vskutku $a_0 = (-1)^1 a_1 \frac{-a_0}{a_1}$. Uvažme nyní polynom $P(x)$ stupně $n + 1$.

$$P(x) = a_{n+1}(x - r_{n+1})(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

Označme $Q(x) = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$, který má stupeň n a zřejmě $a_n = 1$. Dále buď τ_k k-symetricka suma kořenů $Q(x)$. Z indukčního předpokladu plyne

$$Q(x) = x^n - \tau_1 x^{n-1} + \tau_2 x^{n-2} + \cdots + (-1)^n \tau_n,$$

$$P(x) = a_{n+1}(x - r_{n+1})(x^n - \tau_1 x^{n-1} + \tau_2 x^{n-2} + \cdots + (-1)^n \tau_n).$$

Roznásobením zjišťujeme, že

$$P(x) = a_{n+1}(x^{n+1} - (r_{n+1} + \tau_1)x^n + \cdots + (-1)^{n+1} r_{n+1}\tau_n).$$

A to není nic jiného než

$$P(x) = a_{n+1}x^{n+1} - a_{n+1}\sigma_1 x^n + ... + a_{n+1}(-1)^{n+1}\sigma_{n+1},$$

což jsme chtěli dokázat.

$\square$

Příklad 1.3. Najděte součin kořenů polynomu $P(x) = 50x^{50} + 49x^{49} + ... + 2x^2 + 1$.

Nic neřešíme a dosazujeme

$$\sigma_{50} = (-1)^{50}\frac{-1}{50} = -\frac{1}{50}.$$

Příklad 1.4. Najděte všechny uspořádáne trojice (x, y, z) splňující

$$x + y + z = 6,$$

$$xy + yz + xz = 11,$$

$$xyz = 6.$$

Ze zadání tedy $\sigma_1 = 6$, $\sigma_2 = 11$, $\sigma_3 = 6$. Proto x, y, z jsou právě kořeny polynomu $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Někteří z vás už uhodli, že kořeny tohoto polynomu jsou $1, 2$ a 3. Těm, co se nezadařilo, jsme připravili následující odstavec.

Nalezení kořenů

Všichni známe vzorec pro výpočet kořenů kvadratického polynomu $ax^2 + bx + c$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Téměř nikdo si nepamatuje vzorce pro polynomy stupně tři a čtyři, ale existují. Pro polynomy stupně 5 a výše už ale žádné vzorce nemáme. Na to už přišli nezávisle na sobě pánové Évariste Galois a Niels Henrik Abel:

Abel-Ruffiniho věta[2]. Pro $n \geq 5$ neexistuje vzorec, který by vyjadřoval kořeny polynomů stupně n za použití základních aritmetických operací $+, -, \cdot, /$ a n-tých odmocnin.

[2] Opět se jedná o větu s velmi netriviálním důkazem.

Abychom si rozuměli, věta neříká, že si s libovolným polynomem neporadíme bez nějakých vyšších pomůcek. Vezměme si například polynom $x^5 - 1$. Předpokládám, že vás nepřekvapím, že má jediný reálný kořen $x = \sqrt[5]{1} = 1$ a to mi stačila jen pátá odmocnina. Věta nám totiž oznamuje, že neumíme najít vzorec pro **obecný** polynom. Takže ne abyste to hned vzdali, když vidíte polynom stupně 5 a více.

Ukážeme si, jak snadno umíme vyzrát na racionální kořeny. Uvažme polynom $P(x)$ s racionálním kořenem $\frac{p}{q}$, kde $(p,q) = 1$ (Máme náš zlomek vykrácený). Dosaďme:

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Vynásobme členem q^n

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0.$$

Koukněme se rovnici modulo p. Zřejmě p dělí pravou stranu - nulu, a tedy i levou stranu. Vidíme, že p se nachází ve všech členech kromě a_0q^n a právě proto ho musí dělit. My jsme si řekli, že $(p,q) = 1$ proto $p \mid a_0$. Podobně zjistíme, že $q \mid a_n$. Najít delitele čísel a_n a a_0 je už snadné. Nejlíp si ukážeme, jak přesně postupovat na následujícím polynomu:

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$$

Předpokládáme, že má kořen $\frac{p}{q}$. Nutně $p \mid 3$ a $q \mid 2$. Na základě toho dostáváme množinu kandidátů na kořeny

$$\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1, 3, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}.$$

Všechna tato čísla samozřejmě nemusí být kořeny (ani nemohou, máme polynom stupně 3). Pokud ale zadaný polynom má racionální kořen, pak leží v této množině. Zjistit který z nich je rutinní záležitost.

K úplné vybavenosti už nám chybí jediná, nicméně důležitá věc. Představte si, že dostaneme polynom

$$F(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3.$$

Uděláme si seznam kandidátů $\{1, -1, 3, -3\}$ a zjistíme dosazením, že kořeny jsou jen 1 a -3. My však víme, že tento polynom má 3 kořeny. Ano, může se stát, že třetí kořen nebude racionální nebo ani reálný. Co když je ale 1 kořen dvojnásobný? Pamatujeme si, že potom bychom tento polynom měli vyjádřit v součinovém tvaru:

$$F(x) = (x+3)(x-1)(x-1)$$

Takže stačí tyto tři závorky roznásobit a zkontrolovat, jestli se to rovná našemu polynomu. Správný matematik je ale líný a vybere si jednoduší cestu. Touto cestou je **Hornerovo schéma**.

Pomocí Hornerova schématu umíme nejen ověřit je-li číslo kořenem polynomu, ale i zjistit jestli je násobný kořen.

Celý proces se řídí jednoduchým postupem, který budeme souběžně ukazovat na obecném kvadratickém polynomu a polynomu $P(x) = x^2 - 3x + 2$.

Nejdříve si sepíšeme koeficienty polynomu do tabulky. Budeme zkoumat jestli je 1 (resp. z) kořen, zapíšeme je tedy do levého sloupce.

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & 2 \\ \hline 1 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline z & & & \end{array}$$

Další krok je opsat vedoucí koeficient do druhého řádku. Potom v každém sloupci vezmeme číslo v druhém řádku, vynásobíme se z a přičteme koeficient ve sloupci napravo. Výsledek napíšeme do dalšího sloupce druhého řádku.

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline z & a_2 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -2 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline z & a_2 & za_2 + a_1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline z & a_2 & za_2 + a_1 & z^2a_2 + za_1 + a_0 \end{array}$$

Podívejme se co se stalo. Z obecného tvaru kvadratického vidíme, že člen, který jsme sepsali jako poslední je ve skutečnosti funkční hodnota polynomu $P(x)$ v $x = z$. Zejména pokud je z kořen, pak se poslední člen rovná nule. Což vskutku platí pro první polynom a kořen 1. To je ale jen část kouzla Hornerova schématu. Druhá informace se nachází v číslech zapsaných v druhém řádku. Jsou to totiž koeficienty jistého polynomu $Q(x)$, který splňuje

$$P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = Q(x)(x - z)$$

Proto pokud chceme zjistit jestli je z dvojnásobný kořen polynomu $P(x)$, stačí zjistit jestli je i kořen $Q(x)$. A jak jinak než Hornerovým schématem. Vyzkoušejte si na původním polynomu $F(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$..

Příklad 1.5. Najděte kořeny polynomu $x^3 - 10x^2 + 23x - 14$.

Příklad 1.6. Najděte kořeny polynomu $x^3 - 9x^2 + 23x - 15$.

Newtonovy vzorce

Začněme trochu nestandartně příkladem.

Příklad 1.7. Nechť a, b, c jsou kořeny polynomu x^3+2x^2+3x+4. Najděte hodnotu výrazu $a^2+b^2+c^2$.

Řešení. Upravme si hledaný výraz.

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac)$$

Díky Vietovým vztahům víme $a+b+c=-2$ a $ab+bc+ac=3$. Hned tedy dostáváme $a^2+b^2+c^2 = (-2)^2 - 2\cdot 3 = -2$.

Nabízí se otázka, jestli by se tento princip nedal nějak zobecnit. Odpověď přináší Newtonovy vzorce.
Nechť $s_k = r_1^k + r_2^k + \cdots + r_n^k$, kde $r_1, \ldots, r_n$ jsou kořeny polynomu $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Potom Newtonovy vzorce nazýváme následující soustavu

$$a_n s_1 + a_{n-1} = 0$$

$$a_n s_2 + a_{n-1} s_1 + 2a_{n-2} = 0$$

$$a_n s_3 + a_{n-1} s_2 + a_{n-2} s_1 + 3a_{n-3} = 0$$

$$\vdots$$

A tak dále. Obecně je lze vyjádřit jako

$$a_n s_k + a_{n-1} s_{k-1} + \cdots + a_{n-k+1} s_1 + k a_{n-k} = 0.$$

S tím, že $a_j = 0$ pro $j < 0$ (Může se totiž stát, že $k > n$). Tentokrát necháme tvrzení bez důkazu. Zpravidla se ale dokazuje matematickou indukcí.
Podívejme se radši na některé příklady.

Příklad 1.8. Kořeny polynomu $x^4 - x^3 - x^2 - 1 = 0$ jsou a, b, c a d. Najděte hodnotu výrazu $P(a)+P(b)+P(c)+P(d)$, kde $P(x) = x^6 - x^5 - x^3 - x^2 - x$.

Řešení. Hledáme

$$P(a)+P(b)+P(c)+P(d) = (a^6-a^5-a^3-a^2-a)+(b^6-b^5-b^3-b^2-b)+(c^6-c^5-c^3-c^2-c)+$$

$$+(d^6-d^5-d^3-d^2-d) = (a^6+b^6+c^6+d^6)-(a^5+b^5+c^5+d^5)-(a^3+b^3+c^3+d^3)-(a^2+b^2+c^2+d^2)-$$

$$-(a+b+c+d) = s_6 - s_5 - s_3 - s_2 - s_1$$

Teď přišel čas pro Newtonovy vzorce. Postupně pro $k = 2, 4, 6$ dostáváme

$$s_2 - s_1 - 2 = 0$$

$$s_4 - s_3 - s_2 - 4 = 0,$$

$$s_6 - s_5 - s_4 - s_2 = 0.$$

Sečteme a máme $s_6 - s_5 - s_3 - s_2 - s_1 - 6 = 0$. Výsledek je tedy -6.

Příklad 1.9. Najděte všechna řešení systému rovnic

$$x + y + z = 3$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3$$

Řešení. Nechť x, y, z jsou kořeny polynomu $P(t) = t^3 + at^2 + bt + c$. Hned z Vietových vzorců víme $a = -3$. S využitím Newtonových vzorců dopočítáme i zbytek.

$$s_3 - 3s_2 + bs_1 + 3c = 0$$

$$s_2 - 3s_1 + 2b = 0$$

Dosadíme $s_3 = s_2 = s_1 = 3$:

$$3 - 9 + 3b + 3c = 0$$

$$3 - 9 + 2b = 0$$

Takže $P(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 1$. Bystrým okem navíc zjistíme $P(t) = (t-1)^3$. Jediné řešení je proto $x = y = z = 1$.

Tím jsem u konce tohoto povídání. Doufáme, že jsme vás dostatečně připravili na problémy s polynomy a přejeme hodně štěstí při řešení úloh!