Pomocný text

OBARVOVÁNÍ

Barvení je úplné surjektivní zobrazení z množiny bodů do množiny barev. Každému bodu je tedy přiřazena právě jedna barva a každé barvě alespoň jeden bod.
Vůbec si ale pod barvením roviny nepředstavujte její rozdělení na stejnobarevné oblasti. Existují i taková obarvení, ve kterých nenajdeme žádnou jednobarevnou plochu. Uvažme například následující obarvení:

$$f(x) = \begin{cases} \text{červená} & x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \text{modrá} & x + y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Pokud bychom chtěli něco dokazovat v obecně obarvené rovině či prostoru přímo, bylo by to velmi složité. Proto nejčastěji postupujeme sporem.

Úloha 1.1. Rovina je obarvena dvěma barvami. Dokažte, že v ní existují dva body stejné barvy ve vzdálenosti jedna.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že každé dva body ve dvoubarevné rovině ve vzdálenosti jedna mají různou barvu. Uvažme rovnostranný trojúhelník ABC o straně jedna. Body A, B, C mají po dvou různou barvu. Rovina tedy musí být obarvena třemi barvami, což je spor s předpokladem, že rovina je dvoubarevná.

Některé barevné úlohy mají i pěkná kombinatorická řešení.

Úloha 1.2. Rovina je obarvena dvěma barvami. Dokažte, že v ní existuje obdélník s vrcholy stejné barvy.

Řešení. Uvažme devět rovnoběžek a tři kolmice na ně, které určí trojice průsečíků. Existuje 2^3 způsobů, jak tyto trojice obarvit, ale my jich máme $2^3 + 1$, dvě trojice tedy budou obarvené stejně. V každé trojici jsou určitě dva body stejné barvy. Ze dvou stejných trojicích, které jsme našli, uvážíme dva páry stejnobarevných bodů, ty tvoří obdélník.

Hadwiger-Nelsonův problém

Tento otevřený problém matematiky je pojmenovaný po matematicích Hugovi Hadwigerovi a Edwardu Nelsonovi a který byl poprvé formulován okolo roku 1950. Problém řeší otázku, kolik nejméně barev je potřeba na obarvení roviny tak, aby žádné dva body ve vzdálenosti 1 od sebe neměly stejnou barvu. Přestože problém je stále nevyřešený, je známo, že rovinu určitě nelze obarvit méně než 4 barvami tak, aby každé dva body ve vzdálenosti 1 měly různou barvu. Zároveň ale víme, že pro 7 barev to možné je, jelikož takové obarvení popsal matematik John R. Isbell. Odpovědí je tedy jedno z čísel 4, 5, 6 nebo 7.

BRKOS Team 2015

Úloha 1.3. Dokažte, že rovina nelze obarvit třemi nebo méně barvami, aniž by nějaké dva body ve vzdálenosti jedna od sebe měly stejnou barvu.

Řešení. Předpokládejme, že máme rovinu obarvenou třemi barvami tak, že žádné dva body ve vzdálenosti jedna nemají stejnou barvu. V této rovině zvolíme bod A barvy 1, který bude středem kružnice k o poloměru $\sqrt{3}$. Na kružnici musí být alespoň jeden bod jiné barvy, který označíme jako B a jeho barvu jako barvu 2. Dále uvažme kružnici l o poloměru jedna a středem A. Na této kružnici zvolme body C a D tak, aby s bodem B tvořili rovnostranný trojúhelník BCD o straně jedna. Bod B je ve vzdálenosti jedna od A i od B, musí tedy mít jinou barvu než 1 nebo 2, nazvěme ji barvou tři. Bod D je ve vzdálenosti jedna od A, B i C a musí tak mít čtvrtou barvu, to je ale spor s tím, že rovina je trojbarevná.