Pomocný text

KONSTRUKČNÍ GEOMETRIE

Drazí řešitelé,

V tomto povídání se, jak název napovídá, podíváme na základní konstrukční pojmy a zkusíme si vyřešit pár jednoduchých úloh.

Eukleidovské konstrukce

Když mluvíme o konstrukcích, nezajímá nás pouze jak něco zkonstruovat, ale také zda vůbec nějaký obrazec zkonstruovat lze. K obojímu potřebujeme jasně určená pravidla, co si vlastně můžeme dovolit. Proto nám již pan Eukleidés (kolem 260 př. n. l.) dal 2 základní nástroje, které je dovoleno používat:

- Kružítko – na rozdíl od normálních kružítek však toto dokáže nakreslit kružnici o libovolném poloměru, nemá však žádná měřidla.
- Hrana – většinou se zove pravítko, nemá žádnou stupnici, je však libovolně dlouhá, dokážeme tak spojit libovolně vzdálené body a to nejen úsečkou, ale i přímkou.

Co základního tedy pomocí těchto nástrojů dokážeme?

1. Libovolnými 2 body dokážeme vést (právě jednu) úsečku a tu libovolně prodloužit (můžeme tedy uvažovat i přímky, i když ty úplně oficiálně sestrojit neumíme).
2. Vytvořit kružnici se středem v jednom bodě a procházející jiným bodem.
3. Určit bod průniku dvou různých (neležících na sobě) kružnic, úseček a přímek (a případně i složitějších věcí, které jsou ale vetšinou složeny z těchto základních)

Pozn. Zápis konstrukce – Pravděpodobně jste se všichni učili ve škole, že pro přehlednost konstrukce zapisujeme schematicky pomocí značek. Tento zápis však není zcela standartisován, tak nezoufejte, pokud jste se učili jiný způsob:

- $k; k(S, r = \alpha)$ – sestrojíme kružnici k se středem v bodě S a poloměrem α. Častěji než dané číslo α používáme nějakou délku úsečky (např. $|SA|$).
- $p; p = \overleftrightarrow{AB}$ – sestrojíme přímku p procházející body A a B. Případně verze pro polopřímku $\overrightarrow{CD}$.
- $A; A \in p \cap q$ – sestrojíme (označíme) bod A, ležící na průniku p a q, což mohou být přímky, úsečky, nebo každé jedno. Dejte prosím pozor, že přímky a úsečky jsou množiny bodů. Bod A se tedy nerovná průniku (a to ani přímek), ale náleží (je prvkem) průniku.

BRKOS Team 2015

- Za těmito zápisy mohou následovat další podmínky nebo vlastnosti. I když to tedy není přímo základní konstrukce, předpokládáme, že umíte sestrojit kolmé a rovnoběžné přímky, tyto konstrukce tedy můžete zkracovat. Dále také můžete používat úhly, pozor ale na to, aby bylo jasně poznat, který ze dvou úhlů vytčených 2 polopřímkami myslíte. Konstrukce u kterých si nejste jisti, že jsou základní nám radši popište a pak klidně používejte (např. nám řeknete jak sestrojit kružnici opsanou a řeknete, že $k(A, B, C)$ je kružnice opsaná troj. ABC a pak už můžete tenhle zápis beztrestně používat).

Jako cvičení pro zápis konstrukce si ukážeme první úlohu:

Úloha 0.1. Ukažte, že 2. schopnost je ekvivalentní se schopností vytvořit kružnici o poloměru daném libovolnou úsečkou.

Směr "$\Leftarrow$" je zřejmý, neboť za úsečku můžeme vybrat i SA, kde S je střed kružnice a A je požadovaný bod na kružici.

Pro druhý směr již musíme vytvořit konstrukci, která nám pro danou úsečku a bod vytvoří kružnici se středem v onom bodě a poloměrem délky úsečky. Pozor však na to, že smíme používat pouze konstrukci se středem a bodem na kružnici ($k(S; |SA|)$ a nikoli ($k(S; |AB|)$).

Mějme tedy zadanou úsečku AB a bod C. Nyní vytvoříme tři kružnice:

- $k_1; k_1(C; |CA|)$
- $k_2; k_2(A; |AB|)$
- $k_3; k_3(A; |AC|)$

Nyní si označíme 2 průsečíky:

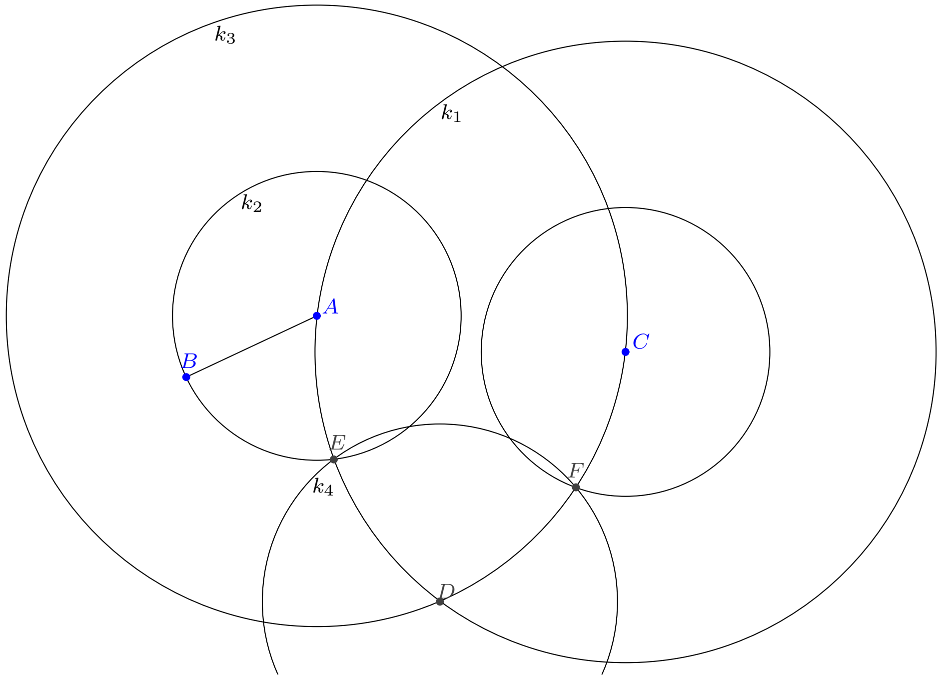
- $D; D \in k_1 \cap k_3$
- $E; E \in k_1 \cap k_2$

Oblouk AD je zjevně shodný s obloukem DC a zároveň $|AB| = |AE|$. Pokud tedy přeneseme oblouk AE na shodný oblouk CF, pak $|CF| = |AB|$ a my budeme moci sestrojit požadovanou kružnici. Přenesení provedeme pomocí poslední kružnice:

- $k_4; k_4(D; |DE|)$
- $F; F \in k_4 \cap k_3; F \neq E$

Nyní už tedy můžeme sestrojit vytouženou kružnici l:

- $l; l(C; |CF|)$



Zde ještě zmiňme 2 věty týkající se konstrukce pravítkem a kružítkem:

Věta 0.1 (Mohr–Mascheroniho)**.** *Kterákoli konstrukce proveditelná za pomoci kružítka a hrany je proveditelná pouze kružítkem.*

Logicky vás teď zajímá, zda podobná věta platí i pro hranu. Zde však budete trochu zklamáni, neboť platí následující:

Věta 0.2 (Poncelet–Steinerova)**.** *Všechny konstrukce proveditelné hranou a kružítkem jsou proveditelé pouze za pomoci hrany, máme-li již zadanou kružnici a její střed.*

Proč je hrana slabší nástroj než kružítko? Souvisí to s tím, že geometrie má svůj algebraický význam (analytická geometrie). Hrana (přímka) má však pouze lineární vyjádření, zatímco kružnice splňuje nějakou kvadratickou rovnici. Pomocí pouze přímek tak nikdy např. nedokážeme spočítat druhé odmocniny.

Pozn. Sestrojitelnost pravidelných mnohoúhelníků – s odpovědí na tuto otázku přišel až Carl Friedrich Gauss roku 1801. Věta, kterou dokázal tvrdí následující:

Věta 0.3 (Gauss–Wantzelova)**.** *Pravidelný n-úhelník je sestrojitelný právě tehdy, když n je součinem mocniny 2 a různých fermatových prvočísel (každého maximálně jednou).*

Fermatovo prvočíslo je prvočíslo tvaru $2^{2^n}+1$. Doposud bylo nalezeno jen 5 fermatových prvočísel (3, 5, 17, 257, 65537).

Tato věta například tvrdí, že lze sestrojit pravidelný 17úhelník (což Gauss sám ukázal o 5 let dříve).

Zde vám předkládáme pár úloh na procvičení:

- Zkonstuujte třetinu obecného úhlu.
- K zadanému kruhu zkonstuujte čtverec stejného obsahu.
- K zadané hraně krychle zkonstruujte hranu krychle dvojnásobného objemu.

BRKOS Team 2015

Že jste se zasekli už na prvním úkolu? To ani není divu! Jsou to totiž tři slavné antické problémy, které nejsou pomocí hrany a kružítka řešitelné (jsou tak slavné, že mají své názvy: **trisekce úhlu, kvadratura kruhu, zdvojení krychle**). Jsou ale tyto úlohy řešitelné jinou konstrukční metodou? Částečně, neboť první a třetí úloha je řešitelná pomocí tzv. Origami konsrukce, nebo jednoduše konstrukce přehýbáním papíru. Ale o tam snad někdy jindy (možná na soustředění?).

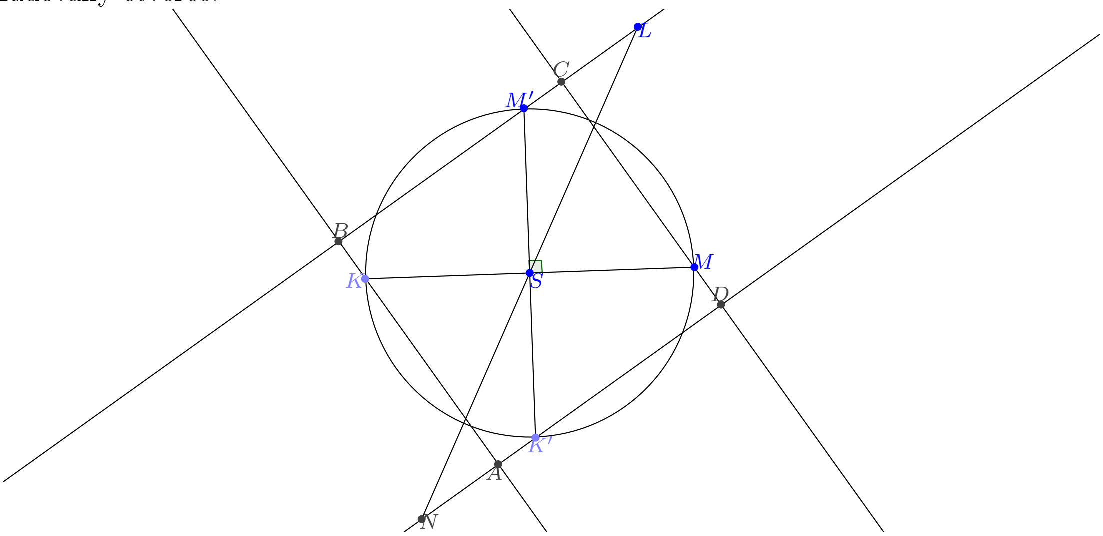
Na závěr si ještě vyřešíme 2 úložky, které vám (snad) pomohou při řešení třetí série.

Řešené příklady

Úloha 0.2. Zkonstruujte čtverec ABCD, máte-li zadány body K, L, M, N pro které platí, že leží po řadě na stranách (přímkách) AB, BC, CD, DA a úsečky KM a LN prochází středem čtverce.

Využijeme toho, že otočením o 90 stupňů kolem středu se čtverec zobrazí sám na sebe a jedna strana se zobrazí na vedlejší. Zároveň je zřejmé, že střed čtverce musí ležet ve středu úseček KM a LN.

Otočíme-li tedy např. body K, M o 90 stupňů kolem středu úsečky KM, dostaneme body K', M', které budou ležet na stranách BC, DA v tomto, nebo opačném pořadí. Nyní už tedy budeme mít na stranách BC, DA dva body, které nám jednoznačně udají přímku (nesplynou-li). Pak už jen stačí vést kolmice na tyto přímky body K, M a dostaneme požadovaný čtverec.



1. $S; S \in KM; |SK| = |SM|$
2. $p; p \perp KM; S \in p$
3. $k; k(S; |SK|)$
4. $K', M'; K', M' = k \cap p$
5. $b; b = M'L$
6. $d; d = K'N$
7. $a; a \perp b; K \in a$

8. $c; c \perp b; M \in c$
9. $A; A \in a \cap d$
10. $B; B \in b \cap a$
11. $C; C \in c \cap b$
12. $D; D \in d \cap c$

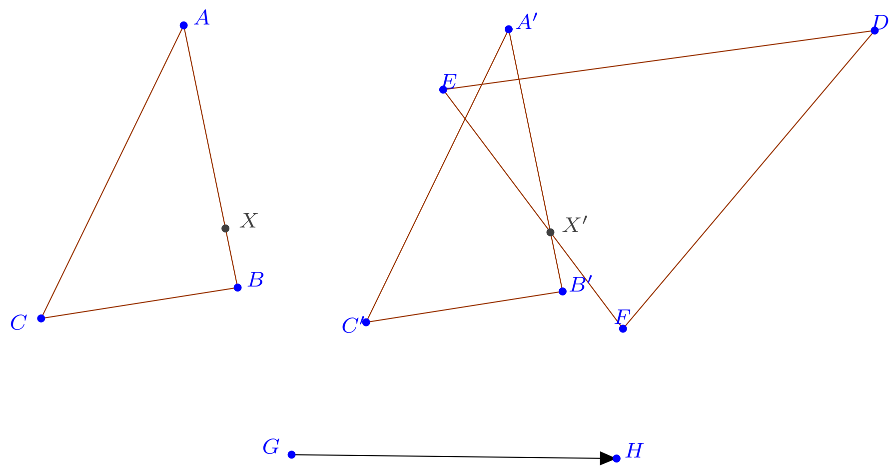
Diskuse: úloha má v obecném případě 2 řešení, neboť jsme měli 2 volby pro bod K'. Ze slovního popisu by se mohlo zdát, že máme dokonce 4 řešení, ale spojení bodů $K'N$ vs. $K'L$ se vzájemně vyruší s otočením o 90 stupňů v kladném, nebo záporném směru. Pokud již body K, L, M, N leží na čtverci, pak dostaneme nekonečně mnoho řešení, neboť BÚNO body K' a N splynou.

Úloha 0.3. Pirát na lodi řešil problém. Měl lano s hákem určité délky a chtěl je zachytit za loď, kterou chtěl okrást. Lano však muselo být hozeno tak, aby bylo po zachycení napnuté a navíc muselo být hozeno po směru větru. Odkud je má pirát házet?

Mějme tedy dva rovinné obrazce P (pirátská loď) a O (obchodní loď) a úsečku AB jejíž délka určuje délku lana a směr větru $\overrightarrow{AB}$.

Často se nám v konstrukční úloze vyplatí využít nějakého shodného zobrazení. Uvědomme si, že z jednoho bodu P můžeme hodit lano do právě jedoho bodu O a to bodu vzdáleného $|GH|$ ve směru $\overrightarrow{GH}$. Pokud tedy posuneme P dle orientované úsečky $\overrightarrow{GH}$, dostaneme množinu bodů, kam můžeme z P zamířit. Jejich průnik s O je tedy množina všech bodů z O, kam lze hodit lano z P. Vybereme tedy libovolný bod z tohoto průniku a posuneme ho zpět úsečkou $\overrightarrow{HG}$. Tím dostaneme bod na P vyhovující zadání.

Pro potřeby konstrukce si lodi representujeme jako trojúhelníky ABC, DEF a lodi jsou tvořeny pouze obvodem. Výsledný bod bude bod X:

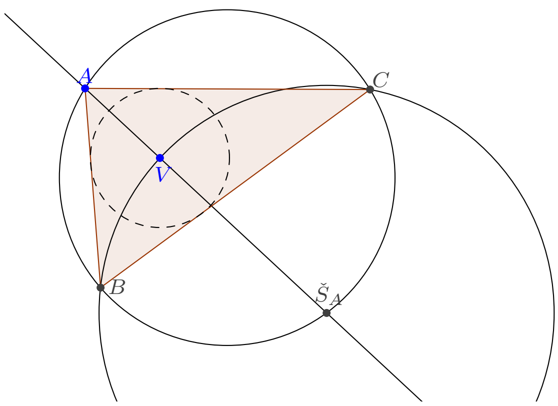


V zápisu konstrukce budeme posunutí objekt X na objekt X' dle orient. úsečky $\overrightarrow{AB}$ zapisovat takto: $T(\overrightarrow{AB}) : X \to X'$. Toto kupříkladu považujeme za triviální (nebo dostatečně známou) konstrukci (stejně jako např. otočení), proto stačí říci, jak jej budete zapisovat.

1. $\Delta A'B'C'; T(\overrightarrow{GH}) : \Delta ABC \rightarrow A'B'C'$
2. $X'; X' \in \Delta A'B'C' \cap \Delta DEF$
3. $X; T(\overrightarrow{HG}) : X' \rightarrow X$

Úloha 0.4. Sestrojte trojúhelník ABC, máte-li zadány body A, B, V, kde V je střed kružnice vepsané, a kružnici o opsanou trojúhelníku ABC.

Pro střed kružnice vepsané platí, že leží na osách úhlů při vrcholech, zejména tak bude ležet na ose úhlu při vrcholu A. Zároveň víme, že osa úhlu při vrcholu protíná kružnici opsanou ve dvou významných bodech. Prvním je samozřejmě vrchol (A) a druhým je takzvaný švčkův bod, označme $\check{S}_A$. Ten má tu vlastnost, že oblouk BC dělí ve dví, tedy $|B\check{S}_A| = |C\check{S}_A|$. Bod C tedy snadno získáme tak, že přeneseme bod B na opsanou kružnici, aby tato rovnost platila.



1. $p; p = AV$
2. $\check{S}_A; \check{S}_A \in p \cap o; \check{S}_A \neq A$
3. $k; k(\check{S}_A, |\check{S}_A B|)$
4. $C; C \in k \cap o; C \neq B$
5. ΔABC

Diskuse: úloha má zjevně jediné řešení.

Pozn.: údaj o poloze bodu B je nadbytečný a může být i škodlivý. Švrčkův bod má totiž další vlastnost (aplikována na naše značení): $|\check{S}_A B| = |\check{S}_A V| = |\check{S}_A C|$. Teoreticky je tedy možné, že úloha nebude mít řešení pro dané zadání.

Poslední úloha na procvičení, kde uvedeme pouze nápad řešení a samotnou konstrukci již necháme na vás.

Úloha 0.5. Sestrojte trojúhelník ABC, máte-li zadánu kružnici opsanou $o(O, R)$ na ní body B, C a znáte poloměr kružnice vepsané (r).

Názak řešení: Označme I střed kružnice vepsané (o kterém víme, že se nachází na průsečíku os úhlů u vrcholů). Ze součtů úhlů v trojúhelnících BIC a BAC ($\alpha+\beta+\gamma = 180°$, $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + |\sphericalangle BIC| = 180°$) dostáváme:

$$|\sphericalangle BIC| = 90° + \frac{\alpha}{2}$$

Množinu takových bodů však dokážeme snadno sestrojit (je to kružnice nad tětivou BC). Zároveň víme, že musí I ležet ve vzdálenosti r od BC, množina takových bodů je přímka v této vzdálenosti od BC. Tam, kde se tyto dvě množiny protnou se zjevně nachazí bod I. Zbytek si již zkuste dokončit sami.

Jiný nápad: Namísto úvaze o úhlech využijeme eulerův vzorec pro vzdálenost d středu kružice vepsané a opsané:

$$d^2 = R(R - 2r)$$

Tím tedy dostaneme kružnici $k(O, d)$, kterou opět protneme onou přímkou a zbytek je již stejný.

Geogebra

Na závěr bychom pro vás měli malé doporučení: pro řešení používejte Geogebru, nebo nějaký jiný program na euklidovskou konstrukci (např. Cabri geometrie). Má to totiž následující výhody:

- můžete si svou konstrukci vyzkoušet na různých obecných případech bez nutnosti přerýsovat
- lehce vyšetříte případy pro diskusi
- vyhnete se tomu, že správnou konstrukci špatně narýsujete a nevyjde vám
- zároveň vás nebudou mást chybná pozorování vzniklá ze špatně nakresleného náčrtku
- pokud obrázek použijete v řešení, opravující organisátor vám bude vděčen, že je to přehledné a jde to přečíst

Přejeme vám hodně úspěchů při řešení!