Pomocný text

Obdélníky

Tématem poslední série tohoto ročníku jsou obdélníky. Přestože úlohy byste neměli mít problém vyřešit i bez pomocného textu, rozhodli jsme se sepsat alespoň základní geometrické poznatky, bez kterých se při řešení nejen našich úloh obejdete jen velmi těžko. A abychom neochudili ty zkušenější z vás, uvedeme také jednu užitečnou větu, kterou sice nejspíš při řešení této série nepoužijete, ale souvisí s tématem a do budoucna by se vám mohla hodit.

Hned na úvod také poznamenejme, že všechny čtverce považujeme za obdélníky, obdélníky považujeme za rovnoběžníky atd.

6.1 Věta o obvodovém a středovém úhlu

Tohle je jedna z nejvíce používaných vět při řešení geometrických úloh v matematické olympiádě a korespondenčních seminářích. Věříme, že mnoho z vás se s ní již nesčetněkrát setkalo, ostatním důrazně doporučujeme si ji projít a dostatečně vštípit do paměti, bude se vám určitě mnohokrát hodit.

Věta 6.1. *Nechť A,B,C, D jsou různé body na kružnici k se středem S a nechť B a D leží každý na jiném oblouku $\widehat{AC}$. Také požadujme ať C a D leží na delším oblouku $\widehat{AB}$. Pak $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ASB|/2$ a $|\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle ADC| = 180°$.*

Důkaz. Nechť $E = CS \cap k$. Pak $\triangle ECA$ a $\triangle ECB$ jsou pravoúhlé trojúhelníky, neboť k je Thaletova kružnice s průměrem CE. Dále $\triangle EBS$ a $\triangle EAS$ jsou rovnoramenné trojúhelníky a snadno tak nahlédneme, že $|\sphericalangle ACE| = |\sphericalangle ASE|/2$ a $|\sphericalangle ECS| = |\sphericalangle ESB|/2$. Sečtením resp. odečtením (v závislosti na poloze bodu S vůči úhlu $\sphericalangle ACB$) těchto rovností získáme $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ASB|/2$. Protože velikost úhlu $\sphericalangle ASB$ nezávisí na poloze bodu C, bude $|\sphericalangle ACB|$ stejné pro všechny možné polohy bodu C na témž oblouku AB kružnice k.

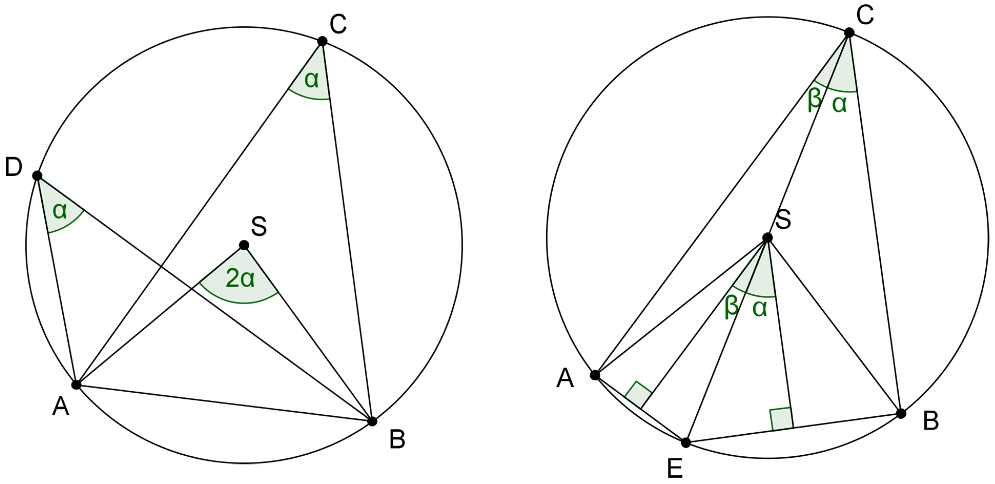
Užitím již dokázaného pro tzv. **tětivový čtyřúhelník** $ABCD$ (je tvořen tětivami téže kružnice) získáme $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CBD|$ a $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC|$. Dále zřejmě $|\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle BDA| + |\sphericalangle DAB| = 180°$. Rozepsaním $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle CAB|$ a použitím zmíněných rovností obdržíme požadovaný výsledek $|\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle ADC| = 180°$.

Důležité také je, že tato věta platí i naopak. Tedy z vlastnosti příslušných úhlů v čtyřúhelníku lze vyvodit, že daný čtyřúhelník je tětivový (jeho vrcholy leží na kružnici).

6.2 Věta o Švrčkově bodě

Místo příkladu si uvedeme další užitečnou větu, kterou bychom bez věty o obvodovém úhlu dokazovali obtížně.

BRKOS Team 2015



Věta 6.2. *Nechť ABC je libovolný trojúhelník, o_a je osa strany a a o_α je osa úhlu α. Pak $\check{S}_a = o_a \cap o_\alpha$ leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC a nazývá se Švrčkův bod.*

Důkaz. Označme kružnici opsanou ABC jako k. Pak označme X druhý průsečík o_α s k (tedy $X \neq A$) a Y označme průsečík o_a s tím obloukem AB kružnice k, který neobsahuje bod C. Pak zřejmě $|AX| = |BX|$, neboť z věty o obvodovém úhlu víme, že stejně velkým úhlům přísluší stejně dlouhé tětivy (na téže kružnici). Dále zřejmě $|AY| = |BY|$, neboť bod Y leží na ose $\overline{AB}$. Pak už ale nutně $X = Y = \check{S}_a$, což jsme chtěli dokázat.

6.3 Kobercová věta

Teď už k té zajímavé části, kterou sice nejspíš nepoužijete v této sérii, ale třeba se vám to někdy bude hodit. Jde o tzv. Kobercovou větu (The Carpets Theorem), která zhruba řečeno říká, že jestliže máte v místnosti hozené dva koberce, jejichž celkový obsah je roven obsahu místnosti, pak obsah částí, kde se koberce překrývají je roven obsahu částí, které vůbec koberci pokryté nejsou. Teď trochu formálněji:

Věta 6.3. *Nechť A je rovinný útvar o obsahu S_A a B a C jsou útvary ležící na A a navíc platí $S_B + S_C = S_A$. Dále nechť $D = B \cap C$ a $E = A \setminus (B \cup C)$. Pak $S_D = S_E$.*

Důkaz. Plyne ihned z rozepsání: $S_D = [D] = [B \cap C] = [B] + [C] - [B \cup C] = [A] - [B \cup C] = [A - B \cup C] = [E] = S_E$, kde $[X]$ značí obsah oblasti X.

Tuto větu lze samozřejmě zobecnit na případ více koberců, pokud zaručíme, že se nikdy nepřekryjí tři zároveň.

Na závěr uvedeme jeden lehčí a jeden těžší příklad, na kterých si můžete kobercovou větu vyzkoušet:

Příklad 1. Nechť M, N jsou po řadě body na stranách AB, BC obdélníku $ABCD$. Dále nechť $P = AN \cap DM$, $Q = AN \cap CM$ a $R = CM \cap DN$. Pak $[AMP] + [BMQN] + [CNR] = [DPQR]$.

Příklad 2. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník. M, N, O, P jsou středy stran AB, BC, CD, DA. $X = AP \cap BQ$, $Y = BQ \cap CM$, $Z = CM \cap DN$, $W = DN \cap AP$. Pak $[XYZT] = [AQX] + [BMY] + [CNZ] + [DPT]$.