Pomocný text

ALESPOŇ

Již tradičně vám přinášíme výběr několika příkladů, které vám snad pomohou při řešení čtvrté série.

Příklad 1. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla. Dokažte, že platí $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Hlavní myšlenka. Všimneme si, že danou nerovnost můžeme získat součinem tří nerovností, které plynou z úpravy na čtverec.

Řešení. Víme, že druhá mocnina každého reálného čísla je vždy nezáporná. Pro libovolná kladná a, b proto platí

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &\geq 0\\ \sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2-2\sqrt{ab} &\geq 0\\ a+b &\geq 2\sqrt{ab}\end{aligned}$$

Stejným způsobem dostáváme $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $c+a \geq 2\sqrt{ca}$. Protože na obou stranách všech tří nerovností jsou kladná čísla, můžeme je mezi sebou vynásobit a opět dostaneme platnou nerovnost:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc.$$

To je však přesně nerovnost, kterou jsme chtěli dokázat.

K nerovnostem vám povíme ještě jednu užitečnou věc a to známou nerovnost mezi průměry. Průměr stupně n daných hodnot x_i $(i \in 1, 2, \ldots, k)$ definujeme následujícím způsobem

$$\langle x_i \rangle_n = \sqrt[n]{\frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^n}{k}}.$$

Jde tedy o n-tou odmocninu z aritmetického průměru n-tých mocnin. Speciálně pak pro $n = 0$ bychom dostali vždy pouze číslo 1, definujme tedy zvlášť průměr stupně 0 jako tzv. geometrický průměr:

$$\langle x_i \rangle_0 = \langle x_i \rangle_g = \sqrt[k]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_k}$$

Nyní bez důkazu (ten můžete snadno najít na mnoha místech internetu) uveďme důležité tvrzení:

Věta 0.1. ***O nerovnosti mezi průměry***

Nechť m, n jsou různá reálná čísla a platí $m > n$. Pak pro libovolná nezáporná $x_1, x_2, \ldots, x_k$ platí

$$\langle x_i \rangle_m \geq \langle x_i \rangle_n$$

a rovnost nastává právě tehdy, když platí $x_1 = x_2 = \cdots = x_k$.

Pozorný brkosák si všimne podobnosti mezi průměrem stupně n a vzorcem pro výpočet bodů za jednu sérii brkosu. A teď už tedy ví, jakým způsobem zvýhodňujeme mladší řešitele a proč se vyplatí řešit všechny úlohy.

Příklad 2. Mějme devět koulí, které jsou na pohled identické. Jedna z nich je o něco málo těžší než ostatní. Pouhým pohledem nejsme schopni říct, která to je, máme ale k dispozici rovnoramenné váhy. Otázka zní, na kolik nejméně vážení jsme schopni těžší kouli přesně určit?

Hlavní myšlenka. Nejprve ukážeme, že pouze s jedním vážením si nevystačíme, už kdybychom uvažovali pouze čtyři koule, natož devět. Poté ukážeme obecný postup pro devět koulí na právě dvě vážení.

Řešení. Předpokládejme, že máme méně než devět koulí. Pro počty jedna až tři si lehce sami ověříte, že jsme schopni těžší kouli odhalit. Pro čtyři už to ovšem obecně nejde. Projděme si v tomto případě všechna možná vážení. Pro $a, b \in \mathbb{N}_0$ označme jako $a \mid b$ vážení, ve kterém umístíme a koulí na jednu stranu vah a b koulí na druhou (vážení je symetrické, stačí uvažovat $a \mid b$, nemusíme provádět i $b \mid a$), výsledek pak bude jeden z následujících: levá straně je těžší ($a > b$), lehčí ($a < b$) nebo jsou obě strany stejně těžké ($a = b$). (Uvědomte si, že pro vážení bereme koule náhodně, protože řešení musí fungovat obecně, ne podle zrovna „šťastné volby“ koulí.) Jednotlivé možnosti pro čtyři koule jsou:

- $1 \mid 1$ Kouli určíme pro výsledky $1 > 1, 1 < 1$, ale pro $1 = 1$ potřebujeme další vážení na zbylé dvě koule.
- $1 \mid 2$ výsledky $1 > 2, 1 = 2$ sice určí těžší kouli (tu nalevo), ale $1 < 2$ ne (hmotnost těžší koule může být jen nepatrně vyšší). Není tedy jasné, jestli je nalevo těžší nebo stejně těžká koule.
- $1 \mid 3$ Opět výsledky $1 > 3, 1 = 3$ určí kouli nalevo jako těžší, ale $1 < 3$ nám neřekne zhola nic.
- $2 \mid 2$ Jak $2 > 2$, tak $2 < 2$ nám pouze určí stranu, na které je těžší koule, která to je, ale nevíme. Výsledek $2 = 2$ nemůže nastat (existenci těžší koule vynucuje zadání).
- $4 \mid 0$ Pro vážení $a \mid 0, a \in \mathbb{N}$ platí triviálně $a > 0$.

(Také by stačilo říct, že jakékoli vážení nám umožní rozlišit pouze tři možnosti, ale pro nejtěžší kouli máme možnosti čtyři.) Tolik první část, nyní ukažme, že těžší kouli umíme vždy odhalit na dvě vážení. Začněmě s vážením $3 \mid 3$ a rozeberme jednotlivé výsledky:

- $3 > 3$ (ekvivalentní $3 < 3$) Těžší koule je určitě v těžší hromádce, pro druhé vážení z ní zvolme $1 \mid 1$. Pro $1 > 1, 1 < 1$ známe kouli okamžitě, pro $1 = 1$ je těžší koule ta, kterou jsme nevážili.
- $3 = 3$ Všech šest vážených koulí je stejných a jako druhé vážení stačí zvážit koule, které jsme zatím nepoužili, tedy $1 \mid 1$. Dále postupujeme jako výše.