Pomocný text

Kroky

V pomocném textu vás tentokrát opět provedeme řešením několika úloh, které vám, jak doufáme, pomohou při řešení tematických úloh třetí série.

Příklad 1.1. Mějme dána přirozená po dvou nesoudělná čísla $a \leq b \leq c$. V každém kroku je nahradíme trojicí čísel $\operatorname{lcm}(a,b), \operatorname{lcm}(a,c), \operatorname{lcm}(b,c)$, kde $lcm(a,b)$ je nejmenší společný násobek čísel a, b (z anglického least common multiple). Najděte všechny možné hodnoty a takové, že se a po konečném počtu kroků znovu zopakuje.

Všimněme si, že $\operatorname{lcm}(x,y) \geq x, y$, tedy v každém kroku se čísla jistě nezmenší. Protože a je nejmenší z čísel a, b, c a protože se žádným krokem nesníží, musí platit, že v každém kroku bude jedna z hodnot a. Jistě však každé z nových čísel bude dělitelné b nebo c, což vzhledem k nesoudělnosti s a dává $a = 1$.

Příklad 1.2. Tato úloha souvisí s úlohou číslo 2. Vyřesme jednodušší příklad, tedy ukažme, že žádná taková trojice nemůže obsahovat druhou mocninu. Toto tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme tedy, že existuje trojice, která obsahuje druhou mocninu. Jistě potom existuje n takové, že a_n je první trojice, kde se vyskytuje druhá mocnina. Jistě takové n bude alespoň 3. Protože však dvěma iteracemi vždy získáme

$a_{n-2} = (x, y, z)$, $a_{n-1} = (xy, yz, xz)$, $a_n = (xyyz, yzxz, xyxz) = (y^2xz, z^2xy, x^2yz)$, pokud a_n obsahuje druhou mocninu, jistě i některé z čísel xz, xy, yz musí být druhá mocnina. Avšak tato čísla se vyskytují ve trojcii a_{n-1} a tedy již předchozí dvojice obsahuje druhou mocninu. My jsme však předpokládali, že n je nejmenší možné, což je kýžený spor.

Tedy v žádné takové trojici nebude druhá mocnina.

Příklad 1.3. Šachovnice je poměrně častý zjev v matematických příkladech. Stejně tak různé příklady na výherní strategie. Protože tabulkám a šachovnicím jsme se věnovali v minulé sérii, projděme si pouze příklad na výherní strategii.

Dva hráči hrají jednoduchou hru. Na začátku leží na stole N kamenů, kde N je nějaké přirozené číslo. Hráči se střídají v tazích a každý takový tak spočívá v odebrání x^2 kamenů, kde x je opět nějaké přirozené číslo. Vyhrává hráč, který vezme poslední kámen. Ukažme, že existuje nekonečně mnoho N takových, že pro ně má druhý hráč výherní strategii.

Předpokládejme, že existuje pouze konečně mnoho takových N, pak jistě existuje nějaké největší. Uvažme hru pro $N^2 + N + 1$. Podle předpokladu zde má výherní strategii první hráč. Ten v prvním kroku odebere nejvýše N^2 kamenů, neboť $(N+1)^2 > N^2+N+1$. Avšak potom na stole vždy zůstane alespoň $N + 1$ kamenů a z našeho předpokladu potom má výherní strategii začínající hráč, což je nyní druhý hráč. Protože však nemohou mít zároveň vítěznou strategii jak první, tak druhý hráč, dostáváme sport. Tedy existuje konečně mnoho stavů takových, že druhý hráč má vítěznou strategii.

BRKOS Team 2014

Příklad 1.4. Na závěr si uveďme zajímavou posloupnost. Jelikož se s různými typy rekurze setkáváme velmi často, obzvláště v problémech definovaných iteračně, zamysleme se nyní nad známou posloupností definovanou například takto: $F_0 = 0, F_1 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n > 1$. Prvních několik členů této posloupnosti je $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$.

Pozoruhodný je například následující vzorec generující všechny prvky této posloupnosti:

$$F_n = \frac{\phi^n + (1-\phi)^n}{\sqrt{5}},$$

kde $\phi = \frac{1+\sqrt{5})}{2}$ je tzv. zlatý řez.

Na závěr si spočtěme jednoduchý příklad. Kolik je podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ takových, že neobsahují dvě po sobě jdoucí čísla?

Označme počet takových podmnožin $P(n)$. Jistě každá vyhovující množina buďto obsahuje n (a potom nesmí obsahovat $n-1$) nebo neobsahuje n. V prvním případě je takových podmnožin zřejmě $P(n-2)$ a v druhém zřejmě $P(n-1)$. Tedy platí $P(n) = P(n-1) + P(n-2)$.

Protože však $P(1) = 2$ a $P(2) = 3$, dostáváme, že $P(n) = F_{n+2}$, avšak tato čísla již známe.