Pomocný text

Tabulky

Účelem povídání k sérii je připravit řešitele na překážky, které ho na cestě k řešení mohou potkat. Typicky je obsahem takového textu seznam potřebných definic a tvrzení týkajících se dané problematiky a často i jejich užití v návodných úlohách. Tentokrát Vás čeká ale něco trochu jiného - nová tvrzení v tomto textu nehledejte. Věříme, že nejlepší průpravou na zdárné vyřešení úloh v této sérii je řešení návodných úloh a to i takových, které s těmi v zadání nemají mnoho společného. Úvahy nad dvourozměrným polem si v nich jistě dobře procvičíte. Rada na závěr: Zkuste problémy nejdříve vyřešit sami, řešení by mělo být spíše pro kontrolu a mělo by pomáhat myšlenky zformulovat, nikoli tvořit.

Příklad 2.1. Šachovnice je klasicky obarvena. V jednom tahu změníme barvy všech políček v jednom sloupci nebo v jednom řádku. Může na konci zůstat pouze jedno políčko černé?

Řešení. Řekněme, že v i-tém tahu měníme barvy v řádku nebo sloupci, který obsahuje c_i černých polí. Tento sloupec obsahuje $8 - c_i$ bílých polí, proto pokud byl před i-tou změnou celkový počet černých polí C_i, bude jich po změně $C_i - c_i + (8 - c_i) = C_i + 8 - 2c_i$. Celkový počet černých polí byl na začátku 32 (sudé číslo) a i-tou změnou se mění o $8 - 2c_i$ (také sudé číslo), je proto stále sudý. Nemůže být proto nikdy roven jedné.

Poznámka. Pokud se v tabulce něco mění, je dobré se zaměřit na věci, které jsou vůči těmto změnám invariantní, což znamená, že zůstávají po provedení těchto změn stejné. Využití tohoto je dobře vidět v první návodné úloze.

Příklad 2.2. Na šachovnici je označených 16 polí tak, že v každém řádku i sloupci jsou označena dvě pole. Dokažte, že na označených 16 polí lze umístit 8 bílých a 8 černých figurek tak, aby v každém řádku a každém sloupci byla právě jedna bílá a právě jedna černá figurka.

Řešení. Pokud dvě označná pole leží ve stejném řádku (sloupci), řekneme o nich, že jsou *spřátelená řádkem (sloupcem)*. Začneme tak, že na libovolné označené pole umístíme bílou figurku. Na pole spřátelené řádkem s obsazeným polem postavíme černou figurku. Třetí figurkou (bílou) obsadíme pole spřátelené sloupcem s druhým obsazeným, čtvrtou (černou) na pole spřátelené se řádkem se třetím a tak dále. Tento algoritmus skončí v okamžiku, kdy bychom měli umístit další figurku na pozici, která je už obsazená. Je jisté, že tuto pozici jsme obsadili jako první (ostatní obsazené pozice mají obsazená obě spřátelená pole). Umisťovali jsme střídavě bílé a černé figurky a uvažovali spřátelení střídavě sloupcem a řádkem. Spřátelení mezi první a poslední figurkou je sloupcem, mezi poslední a předposlední řádkem, poslední figurka je proto černá. Platí tedy, že první figurka má na obou spřátelených polích figurky opačné barvy. Pro ostatní figurky platí totéž díky postupu, kterým jsme figurky přidávali.

Nyní jsou dvě možnosti – buď jsme již umístili figurky na všechna označená pole, nebo ne. Pokud ne, vybereme libovolné neobsazené označené pole a celý algoritmus opakujeme. Opakovat ho budeme do doby, než budou obsazena všechna označená pole.

Příklad 2.3. Do šachovnice $n \times n$ je vepsáno n^2 čísel tak, že jejich součet je nezáporný. Dokažte, že můžeme přemístit sloupce šachovnice tak, aby součet čísel na jedné z diagonál byl také nezáporný.

Řešení. Hodnotu v i-tém řádku a j-tém sloupci označme $a_{i,j}$. Uvažme nyní součty S_k, kde $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, definované takto: $S_0 = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}$ a pro $k > 0$

$$S_k = a_{1,1+k} + a_{2,2+k} + \cdots + a_{n-k,n} + a_{n-k+1,1} + \cdots + a_{n,k}.$$

Každá z hodnot $a_{i,j}$ je započtena do právě jednoho součtu. Hodnota $S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1}$ je rovna součtu všech čísel na šachovnici a dle zadání je nezáporná. Proto musí být alespoň jeden ze součtů S_k nezáporný, nechť je to S_t. Přesunutím prvních t sloupců na pravý konec šachovnice docílíme toho, že prvky sčítané v součtu S_t budou ležet na diagonále. Přesunutí sloupců je proto vždy možné.

Příklad 2.4. Pole šachovnice 12×12 jsou obarvena jednou ze tří barev. Dokažte, že existuje pravoúhelník, jehož rohová políčka jsou stejné barvy.

Řešení. Polí na šachovnici je celkem 144, nejpočetnější barva (řekněme zelená) proto musí být na alespoň $\frac{144}{3} = 48$ polích. Počet zelených polí v i-tém řádku označme a_i. Dvojici zelených polí, které jsou ve stejném řádku, nazveme *duetem*. Počet různých duetů v i-tém řádku je $\frac{a_i(a_i-1)}{2}$. Celkový počet duetů je

$$D = \sum_{i=1}^{12} \frac{a_i(a_i-1)}{2} = \sum_{i=1}^{12} \frac{(a_i - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}{2} = -\frac{3}{2} + \sum_{i=1}^{12} \frac{(a_i - \frac{1}{2})^2}{2}.$$

Aritmetický průměr čísel $a_1 - \frac{1}{2}, a_2 - \frac{1}{2}, \ldots, a_{12} - \frac{1}{2}$ je alespoň $\frac{48 - \frac{12}{2}}{12} = \frac{7}{2}$, jejich kvadratický průměr $Q = \sqrt{\sum_{i=1}^{12} \frac{(a_i - \frac{1}{2})^2}{12}}$ je podle nerovnosti mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem alespoň $\frac{7}{2}$, proto

$$D = -\frac{3}{2} + 6 \sum_{i=1}^{12} \frac{(a_i - \frac{1}{2})^2}{12} = -\frac{3}{2} + 6Q^2 \geq 6 \cdot \frac{49}{4} - \frac{3}{2} = 72.$$

Máme pouze $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ dvojic sloupců, proto existují dva duety ležící ve stejné dvojici sloupců. Pole tvořící tyto duety určují čtyřúhelník se všemi rohy zelenými. Tím je zadané tvrzení dokázáno.

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost milujeme vědu
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ