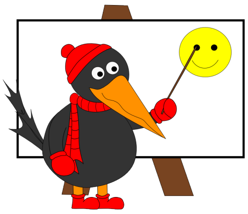
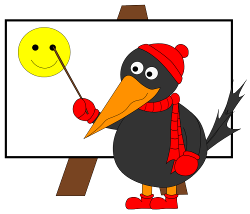


Pomocný text

Nekonečná série



V šesté, nekonečné sérii se budeme zabývat tím, jak se různé matematické objekty chovají, když jejich standardní, „konečné“ pojetí rozšíříme na nekonečno. Půjde zejména o posloupnosti a jejich limity, nekonečné součty a součiny. Na začátek si tedy definujeme posloupnost.

Definice 6.1. *(Nekonečná) posloupnost reálných čísel je zobrazení, ve kterém každému přirozenému číslu přiřadíme jedno reálné číslo. Posloupnost značíme* $\{a_n\}$*, kde* a_n *je* n*-tý člen posloupnosti – tedy reálné číslo, které přiřadíme přirozenému číslu* n*.*

Jednoduchým příkladem posloupnosti jsou třeba vzestupně seřazeny sudá přirozená čísla: $2, 4, 6, 8\dots$. Prvním členem je dvojka, tedy jedničce přiřadíme dvojku, dále dvojce čtyřku, trojce šestku a tak dále až do nekonečna. Obecně tak platí $a_n = 2n$.

V naší definici popisujeme posloupnosti reálných čísel. Můžeme samozřejmě podobně definovat posloupnosti přirozených, celých, nebo i komplexních čísel. Obecně posloupnost prvků množiny M je zobrazením z množiny přirozených čísel do množiny M. V této sérii však pracujeme zejména s reálnými čísly, proto nadále budeme hovořit o posloupnostech reálných čísel.

Jak jsme již naznačili, konkrétní posloupnost můžeme popsat předpisem pro n-tý člen. Zápis $a_n = n^2$ například vyjadřuje vzestupnou posloupnost druhých mocnin přirozených čísel: $1, 4, 9, 16\dots$ Existují i jiné způsoby, jak definovat konkrétní posloupnost. Jedním z nich je rekurentní (rekurzivní) vyjádření. Tehdy typicky nejprve řekneme, čemuž bude rovný první člen – například $a_1 = 2$ a dále vyjádříme člen a_{n+1} pomocí člena a_n, například: $a_{n+1} = 2a_n$. Dostáváme tak vlastně první člen a návod, jak z něj vypočítat druhý, z druhého třetí, atd. V tomto případě bude posloupnost vypadat následovně: $2, 4, 8, 16\dots$

Rekurentní vyjádření je v mnoha případech užitečné a často intuitivní, jeho nevýhodou však je, že abychom spočítali n-tý člen, musíme vypočítat všechny členy před ním. Typickou úlohou, se kterou se setkáváme, je najít pro posloupnost zadanou rekurentně její předpis pro n-tý člen. Nalezení samotného předpisu nemusí být vždy jednoduché a občas vyžaduje jisté zkušenosti. Typicky však pomůže spočítat si pár prvních členů a zkusit podle nich předpis „uhodnout“. Když už máme v rukou konkrétní předpis, jeho správnost ověříme tak, že ji dokážeme matematickou indukcí – to už je většinou o něco lehčí problém. Postup si ukážeme na našem příkladu.

Příklad 6.1. Vyjádřete n-tý člen posloupnosti zadané rekurentně: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n$.

Řešení. Podíváme se na několik prvních členů: 2, 4, 8, 16. Snadno vidíme, že jde o mocniny dvojky, což je ostatně zřejmé z toho, že dvojku z prvního členu postupně násobíme dalšími dvojkami. Vzorec pro n-tý člen tedy zřejmě bude $a_n = 2^n$. Jeho správnost ověříme indukcí. Pro první člen vzorec platí: $a_1 = 2^1 = 2$, což je ve shodě s rekurentním zadáním. Předpokládejme nyní správnost vzorce pro $n = k$, tedy $a_k = 2^k$. Z toho dokážeme platnost pro $k+1$ – chceme tedy dokázat $a_{k+1} = 2^{k+1}$. Z rekurzivního předpisu máme $a_{k+1} = 2a_k$. Dosadíme podle indukčního předpokladu: $a_{k+1} = 2(2^k) = 2^{k+1}$. Tím pádem jsme dokázali, že předpis $a_n = 2^n$ vyjadřuje tutéž posloupnost, jako rekurentní vztah ze zadání. □

Nyní představíme další důležitý pojem, a tím je limita posloupnosti.

Definice 6.2. *Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu L, značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, když pro libovolné (malé) reálné $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$.*

Co tedy znamená, že posloupnost má limitu L? Znamená to, že ať vezmeme jakkoli malé číslo ε, bude existovat jisté hraniční n_0, tak že každý člen od a_{n_0} až do nekonečna se bude od limity L lišit o méně, než je zvoleno ε. Limita tedy vyjadřuje, že členy posloupnosti se budou směrem do nekonečna přibližovat k číslu L – a že se přiblíží libovolně blízko. Ukážeme si to na příkladu.

Příklad 6.2. Určete limitu posloupnosti $a_n = \frac{1}{n}$.

Řešení. Členy zadané posloupnosti budou vypadat následovně: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}...$ Je zřejmé, že každý člen bude menší než ten před ním, vždy však bude větší od nuly. K nule se ve skutečnosti víme přiblížit libovolně blízko, limitou posloupnosti tedy bude nula. Dokážeme to jednoduše – pro libovolné ε (blízkost k nule) najdeme n_0 tak, že každý člen a_n pro $n \geq n_0$ bude od nuly rozdílný o méně, než ε. Mějme tedy libovolné $\varepsilon > 0$. Položíme $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. To znamená, že hodnotu $\frac{1}{\varepsilon}$ nejprve zaokrouhlíme na celé číslo směrem dolů a pak k němu přičteme jedničku. Nyní dokážeme, že rozdíl člena a_{n_0} a limity 0 bude menší než ε, čili $|a_{n_0} - 0| = \frac{1}{n_0} = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1} < \varepsilon$. Na dokazovanou nerovnost aplikujeme ekvivalentní úpravy:

$$\frac{1}{\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1} < \varepsilon$$

$$1 < \varepsilon \left(\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \right)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

Je zřejmé, že poslední nerovnost platí. Jelikož jsme použili ekvivalentní úpravy, platná je i dokazovaná nerovnost a tedy pro námi zvolené n_0 je a_{n_0}dostatečně blízko nule. Zbývá nám dokázat, že to platí i pro každé další $n \geq n_0$. Jak jsme však řekli, každý člen je menší než předchozí, zároveň však vždy větší od nuly. Tím pádem každé další a_n bude k nule alespoň tak blízko jak a_{n_0} a dokázali jsme tedy, že 0 je skutečně limitou této posloupnosti. □

Ne každá posloupnost má limitu. Například pro posloupnost $a_n = n$ žádnou vlastní limitu nenajdeme. Vidíme, že tato posloupnost roste nad libovolnou mez, tedy její hodnota se vlastně blíží k nekonečnu. Zavedeme si proto pojem nevlastní limity.

Definice 6.3. *Posloupnost $\{a_n\}$ má nevlastní limitu ∞, resp. $-\infty$, když pro libovolné reálné číslo h existuje n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n > h$, resp. $a_n < h$.*

Limita rovná nekonečnu tedy znamená, že ať zvolíme jakoukoliv horní mez (h), posloupnost ji časem překročí tak, že se pod ni už nevrátí (např. $a_n = n$). Limita rovná zápornému nekonečnu naopak znamená, že posloupnost se dostane pod libovolnou dolní mez a nad ni se už nevrátí (např. $a_n = -n$). Platí, že každá posloupnost má nejvýše jednu limitu. Pokud ji má a je jí reálné číslo (tedy jde o vlastní limitu), říkáme že posloupnost konverguje, v opačném případě (limita neexistuje nebo je nevlastní) diverguje. Existují tedy i posloupnosti, které žádnou limitu nemají – například posloupnost $a_n = (-1)^n$, v níž se donekonečna střídají -1 a 1.

Při počítání limit můžeme využít několik pravidel. Ať $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou konvergentní posloupnosti a c je libovolné reálné číslo. Pak platí:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Pokud je každý člen posloupnosti $\{b_n\}$ různý od nuly a i její limita je nenulová, platí:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

Získané znalosti ukážeme na příkladu:

Příklad 6.3. Určete limitu posloupnosti $a_n = \frac{3n^2-2n+1}{n^2-4}$.

Řešení.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2n+1}{n^2-4} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2n+1}{n^2-4}.\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{4}{n^2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3-2.\frac{1}{n}+\frac{1}{n}.\frac{1}{n}}{1-4.\frac{1}{n}.\frac{1}{n}} = \frac{3-2.0+0.0}{1-4.0.0} = 3$$

Na základě uvedených znalostí o posloupnostech můžeme přejít k nekonečným řadám. Předpokládejme, že máme posloupnost $\{a_k\}$. Nekonečná řada je vlastně součet všech jejích členů, tedy výraz ve tvaru $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ – zapisujeme také $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Na první pohled se může zdát, že součet nekonečně mnoho čísel musí být také nekonečný, nemusí to tak však být vždy.

Abychom mohli zkoumat nekonečné řady, zavedeme si nejdříve pojem částečného součtu. Částečný součet posloupnosti, značíme $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ nebo také s_n, je součet jejích prvních n členů, tedy $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$. Je zřejmé, že takový součet umíme spočítat pro libovolné číslo n. Uvažme nyní posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$. Prvním členem této posloupnosti tedy bude vlastně první člen původní posloupnosti a_1, druhým bude součet jejích prvních dvou členů, třetím součet prvních tří členů atd.

Čím dále tedy zajdeme v posloupnosti částečných součtů, tím více členů posloupnosti $\{a_k\}$ zahrneme do součtu s_n. Naším cílem je najít součet všech členů – bude nás tedy zajímat, jak se bude posloupnost částečných součtů vyvíjet směrem do nekonečna – a právě tuto myšlenku vyjadřuje pojem limity. Součtem všech členů posloupnosti $\{a_k\}$, pokud existuje, je limita posloupnosti její částečných součtů. Zapsáno formálně:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Pokud tedy máme vypočítat součet nekonečné řady, snažíme se nejprve najít předpis pro posloupnost částečných součtů. Jde o podobný úkol, jako hledání předpisu pro n-tý člen rekurentně zadané posloupnosti. Stačí si uvědomit, že posloupnost částečných součtů lze také zapsat rekurentně: $s_1 = a_1$, $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$. Když vyjádříme posloupnost částečných součtů, stačí spočítat její limitu. Pokud ta existuje a je to reálné číslo, jde o součet dané nekonečné řady. Ukážeme si postup na příkladu:

Příklad 6.4. Určete součet nekonečné řady $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$.

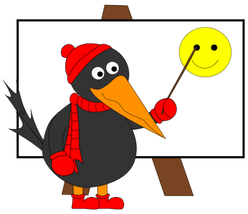
Řešení. Nejdříve si vypíšeme několik prvních členů posloupnosti: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}\dots$ Následně si spočítáme několik prvních částečných součtů: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{15}{16}\dots$ Nyní vidíme, že předpis pro částečný součet s_n je $s_n = \frac{2^n-1}{2^n}$. Jeho správnost ověříme indukcí. Platí $s_1 = \frac{1}{2} = a_1$. Předpokládáme platnost pro $n = k$, čili $s_k = \frac{2^k-1}{2^k}$. Pro $n = k+1$ pak platí: $s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = \frac{2^k-1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2(2^k-1)+1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1}-2+1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}$. Tím pádem jsme dokázali platnost našeho předpisu. Když se na něj nyní podíváme, už vidíme, že připočítáváním dalších členů se součet bude blížit jedničce, nikdy ji však nedosáhne. Tento odhad nyní potvrdíme spočítáním limity.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n}.\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1} = \frac{1-0}{1} = 1$$

Vidíme tedy, že nekonečná řada čísel může mít konečný součet. Příklad který jsme uvedli je mimo jiné řešením známého filozofického paradoxu závodu Achillea a želvy.

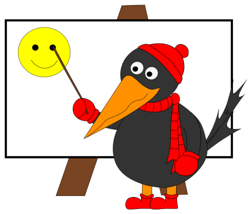
Podobně jako při posloupnostech také rozlišujeme konvergentní a divergentní řady, a to podle toho, jaká je posloupnost částečných součtů dané řady. Platí také, že posloupnost může mít konečný součet, jen pokud má limitu rovnou nule (jde o nutnou, nikoliv však dostačující podmínku).

Podobně jako nekonečné součty také můžeme zavést pojem nekonečného součinu – značíme $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} a_k$. Způsob jeho počítání je analogický nekonečným součtem – konkrétní detaily proto už necháme na Vás. Doufáme, že Vás šestá série opět donutí nastartovat mozkové závity a přejeme hodně zdaru při jejím řešení!



Pomocný text

Nekonečná série



V šiestej, nekonečnej sérii sa budeme zaoberať tým, ako sa rôzne matematické objekty správajú, keď ich štandardné, „konečné“ ponímanie rozšírime na nekonečno. Pôjde najmä o postupnosti a ich limity, nekonečné súčty a súčiny. Na začiatok si teda definujeme postupnosť.

Definícia 6.1. (Nekonečná) postupnosť reálnych čísel je zobrazenie, v ktorom každému prirodzenému číslu priradíme jedno reálne číslo. Postupnosť značíme $\{a_n\}$, kde a_n je n-tý člen postupnosti – teda reálne číslo, ktoré priradíme prirodzenému číslu n.

Jednoduchým príkladom postupnosti sú trebárs vzostupne zoradené párne prirodzené čísla: $2, 4, 6, 8\ldots$. Prvým členom je dvojka, teda jedničke priradíme dvojku, ďalej dvojke štvorku, trojke šestu a tak ďalej až do nekonečna. Všeobecne tak platí $a_n = 2n$.

V našej definícii popisujeme postupnosti reálnych čísel. Môžeme samozrejme podobne definovať postupnosti prirodzených, celých, alebo aj komplexných čísel. Všeobecne postupnosť prvkov množiny M je zobrazením z množiny prirodzených čísel do množiny M. V tejto sérii však pracujeme najmä s reálnymi číslami, preto naďalej budeme hovoriť o postupnostiach reálnych čísel.

Ako sme už naznačili, konkrétnu postupnosť môžeme popísať predpisom pre n-tý člen. Zápis $a_n = n^2$ napríklad vyjadruje vzostupnú postupnosť druhých mocnín prirodzených čísel: $1, 4, 9, 16\ldots$ Existujú aj iné spôsoby, ako definovať konkrétnu postupnosť. Jedným z nich je rekurentné (rekurzívne) vyjadrenie. Vtedy typicky najprv povieme, čomu bude rovný prvý člen – napríklad $a_1 = 2$ a ďalej vyjadríme člen a_{n+1} pomocou člena a_n, napríklad: $a_{n+1} = 2a_n$. Dostáme tak vlastne prvý člen a návod, ako z neho vypočítať druhý, z druhého tretí, atď. V tomto prípade bude postupnosť vyzerať nasledovne: $2, 4, 8, 16\ldots$

Rekurentné vyjadrenie je v mnohých prípadoch užitočné a často intuitívne, jeho nevýhodou však je, že aby sme spočítali n-tý člen, musíme vypočítať všetky členy pred ním. Typickou úlohou, s ktorou sa stretávame, je nájsť pre postupnosť zadanú rekurentne jej predpis pre n-tý člen. Nájdenie samotného predpisu nemusí byť vždy jednoduché a občas vyžaduje isté skúsenosti. Typicky však pomôže spočítať si zopár prvých členov a skúsiť podľa nich predpis „uhádnuť“. Keď už máme v rukách konkrétny predpis, jeho správnosť overíme tak, že ju dokážeme matematickou indukciou – to už je zväčša o niečo ľahší problém. Postup si ukážeme na našom príklade.

Príklad 6.1. Vyjadrite n-tý člen postupnosti zadanej rekurentne: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n$.

Riešenie. Pozrieme sa na niekoľko prvých členov: 2, 4, 8, 16. Ľahko vidíme, že ide o mocniny dvojky, čo je napokon zrejmé z toho, že dvojku z prvého člena postupne násobíme ďalšími dvojkami. Vzorec pre n-tý člen teda zrejme bude $a_n = 2^n$. Jeho správnosť overíme indukciou. Pre prvý člen vzorec platí: $a_1 = 2^1 = 2$, čo je v zhode s rekurentným zadaním. Predpokladajme teraz správnosť vzorca pre $n = k$, teda $a_k = 2^k$. Z toho dokážeme platnosť pre $k+1$ – chceme teda dokázať $a_{k+1} = 2^{k+1}$. Z rekurzívneho predpisu máme $a_{k+1} = 2a_k$. Dosadíme podľa indukčného predpokladu: $a_{k+1} = 2(2^k) = 2^{k+1}$. Tým pádom sme dokázali, že predpis $a_n = 2^n$ vyjadruje tú istú postupnosť, ako rekurentný vzťah zo zadania. $\square$

BRKOS Team 2014

Teraz predstavíme ďalší dôležitý pojem, a tým je limita postupnosti.

Definícia 6.2. Postupnosť $\{a_n\}$ má vlastnú limitu L, značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, keď pre ľubovoľné (malé) reálne $\varepsilon > 0$ existuje n_0 také, že pre každé $n \geq n_0$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$.

Čo teda znamená, že postupnosť má limitu L? Znamená to, že nech zoberieme akokoľvek malé číslo ε, bude existovať isté hraničné n_0, tak že každý člen od a_{n_0} až do nekonečna sa bude od limity L líšiť o menej, než je zvolené ε. Limita teda vyjadruje, že členy postupnosti sa budu smerom do nekonečna približovať k číslu L – a že sa priblížia ľubovoľne blízko. Ukážeme si to na príklade.

Príklad 6.2. Určite limitu postupnosti $a_n = \frac{1}{n}$.

Riešenie. Členy zadanej postupnosti budú vyzerať nasledovne: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$... Je zrejmé, že každý člen bude menší než ten pred ním, vždy však bude väčší od nuly. K nule sa v skutočnosti vieme priblížiť ľubovoľne blízko, limitou postupnosti teda bude nula. Dokážeme to jednoducho – pre ľubovoľné ε (blízkosť k nule) nájdeme n_0, tak že každý člen a_n pre $n \geq n_0$ bude od nuly rozdielny o menej, než ε. Majme teda ľubovoľné $\varepsilon > 0$. Položíme $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. To znamená, že hodnotu $\frac{1}{\varepsilon}$ najprv zaokrúhlime na celé číslo smerom dole a potom k nemu pričítame jedničku. Teraz dokážeme, že rozdiel člena a_{n_0} a limity 0 bude menší než ε, čiže $|a_{n_0} - 0| = \frac{1}{n_0} = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1} < \varepsilon$. Na dokazovanú nerovnosť aplikujeme ekvivalentné úpravy:

$$\frac{1}{\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1} < \varepsilon$$

$$1 < \varepsilon \left(\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \right)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$$

Je zrejmé, že posledná nerovnosť platí. Nakoľko sme použili ekvivalentné úpravy, platná je aj dokazovaná nerovnosť a teda pre nami zvolené n_0 je a_{n_0} dostatočne blízko nule. Zostáva nám dokázať, že to platí aj pre každé ďalšie $n \geq n_0$. Ako sme však povedali, každý člen je menší než predchádzajúci, zároveň však vždy väčší od nuly. Tým pádom každé ďalšie a_n bude k nule aspoň tak blízko ako a_{n_0} a dokázali sme teda, že 0 je skutočne limitou tejto postupnosti. □

Nie každá postupnosť má limitu. Napríklad pre postupnosť $a_n = n$ žiadnu vlastnú limitu nenájdeme. Vidíme, že táto postupnosť rastie nad ľubovoľnú hranicu, teda jej hodnota sa vlastne blíži k nekonečnu. Zavediemie si preto pojem nevlastnej limity.

Definícia 6.3. Postupnosť $\{a_n\}$ má nevlastnú limitu ∞, resp. $-\infty$, keď pre ľubovoľné reálne číslo h existuje n_0 také, že pre každé $n \geq n_0$ platí $a_n > h$, resp. $a_n < h$.

Limita rovná nekonečnu teda znamená, že nech zvolíme akúkoľvek hornú hranicu (h), postupnosť ju časom prekročí tak, že sa pod ňu už nevráti (napr. $a_n = n$). Limita rovná zápornému nekonečnu naopak znamená, že postupnosť sa dostane pod ľubovoľnú dolnú hranicu a nad ňu sa už nevráti. Platí, že každá postupnosť má najviac jednu limitu. Pokiaľ ju má a je ňou reálne číslo (teda ide o vlastnú limitu), hovoríme že postupnosť konverguje, v opačnom prípade (limita neexistuje alebo je nevlastná) diverguje. Existujú teda aj postupnosti, ktoré žiadnu limitu nemajú – napríklad postupnosť $a_n = (-1)^n$, v ktorej sa donekonečna striedajú -1 a 1.

Pri počítaní limít môžeme využiť niekoľko pravidiel. Nech $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ sú konvergentné postupnosti a c je ľubovoľné reálne číslo. Potom platí:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Pokiaľ je každý člen postupnosti $\{b_n\}$ rôzny od nuly a aj jej limita je nenulová, platí:

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

Získané znalosti ukážeme na príklade:

Príklad 6.3. Určite limitu postupnosti $a_n = \frac{3n^2-2n+1}{n^2-4}$.

Riešenie.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{n^2-4} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{n^2-4}.\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{4}{n^2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3-2.\frac{1}{n}+\frac{1}{n}.\frac{1}{n}}{1-4.\frac{1}{n}.\frac{1}{n}} = \frac{3-2.0+0.0}{1-4.0.0} = 3$$

Na základe uvedených znalostí o postupnostiach môžeme prejsť k nekonečným radom. Predpokladajme, že máme postupnosť $\{a_k\}$. Nekonečný rad je vlastne súčet všetkých jej členov, teda výraz v tvare $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ – zapisujeme tiež $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Na prvý pohľad sa môže zdať, že súčet nekonečne mnoho čísel musí byť tiež nekonečný, nemusí to tak však byť vždy.

Aby sme mohli skúmať nekonečné rady, zavedieme si najskôr pojem čiastočného súčtu. Čiastočný súčet postupnosti, značíme $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ alebo tiež s_n, je súčet jej prvých n členov, teda $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$. Je zrejmé, že takýto súčet vieme spočítať pre ľubovoľné číslo n. Uvážme teraz postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}$. Prvým členom tejto postupnosti teda bude vlastne prvý člen pôvodnej postupnosti a_1, druhým bude súčet jej prvých dvoch členov, tretím súčet prvých troch členov atď.

Čím ďalej teda zájdeme v postupnosti čiastočných súčtov, tým viac členov postupnosti $\{a_k\}$ zahrnieme do súčtu s_n. Naším cieľom je nájsť súčet všetkých členov – bude nás teda zaujímať, ako sa bude postupnosť čiastočných súčtov vyvíjať smerom do nekonečna – a práve túto myšlienku vyjadruje pojem limity. Súčtom všetkých členov postupnosti $\{a_k\}$, ak existuje, je limita postupnosti jej čiastočných súčtov. Zapísané formálne:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Ak teda máme vypočítať súčet nekonečného radu, snažíme sa najprv nájsť predpis pre postupnosť čiastočných súčtov. Ide o podobnú úlohu, ako hľadanie predpisu pre n-tý člen rekurentne zadanej postupnosti. Stačí si uvedomiť, že postupnosť čiastočných súčtov možno tiež zapísať rekurentne: $s_1 = a_1$, $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$. Keď vyjadríme postupnosť čiastočných súčtov, stačí spočítať jej limitu. Pokiaľ tá existuje a je to reálne číslo, ide o súčet daného nekonečného radu. Ukážeme si postup na príklade:

Príklad 6.4. Určite súčet nekonečného radu $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$.

Riešenie. Najskôr si vypíšeme niekoľko prvých členov postupnosti: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}\dots$ Následne si spočítame niekoľko prvých čiastkových súčtov: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{15}{16}\dots$ Teraz vidíme, že predpis pre čiastkový súčet s_n je $s_n = \frac{2^n-1}{2^n}$. Jeho správnosť oveíme indukciou. Platí $s_1 = \frac{1}{2} = a_1$. Predpokladáme platnosť pre $n = k$, čiže $s_k = \frac{2^k-1}{2^k}$. Pre $n = k+1$ potom platí: $s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = \frac{2^k-1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2(2^k-1)+1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1}-2+1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}$. Tým pádom sme dokázali platnosť nášho predpisu. Keď sa naň teraz pozrieme, už vidíme, že pričítavaním ďalších členov sa súčet bude blížiť jedničke, nikdy ju však nedosiahne. Tento odhad teraz potvrdíme spočítaním limity.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n}.\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1} = \frac{1-0}{1} = 1$$

Vidíme teda, že nekonečný rad čísel môže mať konečný súčet. Príklad ktorý sme uviedli je okrem iného riešením známeho filozofického paradoxu závodu Achillea a želvy.

Podobne ako pri postupnostiach tiež rozlišujeme konvergentné a divergentné rady, a to podľa toho, aká je postupnosť čiastočných súčtov daného radu. Platí tiež, že postupnosť môže mať konečný súčet, len ak má limitu rovnú nule (ide o nutnú, nie však dostačujúcu podmienku).

Podobne ako nekonečné súčty tiež môžeme zaviesť pojem nekonečného súčinu – značíme $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} a_k$. Spôsob jeho počítania je analogický nekonečným súčtom – konkrétne detaily preto už necháme na Vás. Dúfame, že Vás šiesta séria opäť donúti naštartovať mozgové závity a prajeme veľa zdaru pri jej riešení!