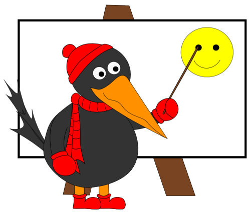
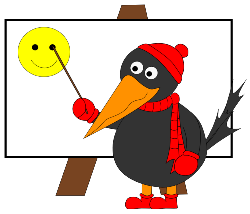


Pomocný text

STEREOMETRIE



Stereometrie, neboli geometrie v prostoru je často přehlížená část matematiky. Přesto se s ní potkáváme prakticky na každém rohu - vždyť svět takový, jak jej vnímáme, je právě svět třírozměrného prostoru! Stereometrie není jen počítání objemů a povrchů těles. Můžeme zkoumat vzájemnou polohu bodů, přímek, rovin, koulí a jiných útvarů. A podobně jako v rovinné geometrii, je i ta prostorová plná pozoruhodných vlastností a zákonitostí.

Vzájemná poloha přímek

V rovině mohou dvě přímky buď splývat, protínat se nebo být rovnoběžné. V prostoru je však situace složitější. Rozeznáváme čtyři vzájemné polohy:

- **Totožné:** Přímky spolu splývají.
- **Různoběžné:** Přímky se protínají v jediném bodě. Těmito přímkami lze proložit rovina.
- **Rovnoběžné:** Přímky se neprotínají, ale přesto jimi lze proložit rovina. Lze posunout jednu přímku tak, aby splynula s druhou.
- **Mimoběžné:** Přímky se neprotínají a nelze jimi ani proložit rovinu. Posunutím jedné z nich lze docílit různoběžné polohy.

Vzájemná poloha rovin

V prostoru můžeme navíc zkoumat i vzájemnou polohu dvou rovin. Zde je situace analogická přímkám v rovině:

- **Totožné:** Roviny splývají.
- **Různoběžné:** Roviny se protínají, ale nesplývají. Průnik takových rovin je přímka, která se nazývá průsečnice.
- **Rovnoběžné:** Roviny se neprotínají. Jednu rovinu lze posunout tak, aby splynula s druhou.

Vzájemná poloha přímky a roviny

Kromě toho můžeme také rozlišovat různé vzájemné polohy přímky a roviny:

- **Náležející** přímka rovině je taková přímka, která celá leží v této rovině.

- **Protínající** rovinu je přímka v případě, že má s rovinou společný právě jeden bod.
- **Rovnoběžná** s rovinou je tehdy, když s rovinou nemá žádný průnik. Lze pak posunout tak, aby rovině náležela.

Další důležité pojmy

Zatím to byly triviální záležitosti, které nejspíš nikoho nepřekvapí. Pojďme si teď vymezit několik dalších důležitých pojmů z prostorové geometrie:

- **Příčka mimoběžek** je přímka (nebo úsečka) různoběžná s oběma danými mimoběžkami. Jsou-li dány dvě mimobežky a bod v prostoru neležící v rovině, která jde jednou z nich a je rovnoběžná s druhou (označme je ρ a σ), existuje právě jedna příčka těchto mimoběžek jdoucí daným bodem. Jsou-li dány mimoběžky a přímka p nerovnoběžná s ρ a σ, existuje právě jedna příčka rovnoběžná s p. Existuje právě jedna příčka kolmá na obě mimoběžky (kolmostí zde myslíme kolmá v rovině jdoucí různoběžkami). Ta se pak nazývá **osa mimoběžek**.
- **Úhly a kolmost:** Nebudeme se zde zabývat definicí úhlu mezi rovinami nebo mezi přímkami. Je zřejmé že v (Eukleidovském) prostoru na sebe mohou být roviny kolmé, stejně tak jako různoběžky. Úhlem mezi rovinami chápeme úhel který svírají průsečnice těchto rovin s rovinou kolmou na obě dvě zadané roviny. Úhel mezi mimoběžkami je úhel mezi jednou z nich a druhou posunutou tak, aby byly výsledné přímky různoběžné. Úhel mezi přímkou a rovinou je úhel mezi touto přímkou a průsučnicí dané roviny s rovinou kolmou jdoucí danou přímkou.

Základní vlastnosti

Věta 4.1. *Nechť α, β, γ jsou navzájem různoběžné roviny. Jejich průsečnice označme a,b,c. Pak platí právě jedno z následujících tvrzení:*

1. *Přímky a, b, c prochází jedním bodem (a jsou vzájemně různoběžné).*
2. *Přímky a, b, c jsou totožné.*
3. *Přímky a, b, c jsou vzájemně rovnoběžné.*

Důkaz. Dvě roviny α a β se protínají v přímce c, která může rovinou γ procházet (1.), náležet jí (2.) nebo k ní být rovnoběžná (3.) V případě rovnoběžnosti musí být i a a b vzájemně rovnoběžné (jinak by roviny α a β měly průnik i mimo svou průsečnici). Analogicky musí být tedy rovnoběžné každé dvě. □

Existuje mnoho dalších triviálních vlastností - například průsečnice koule a roviny (nebo dvou koulí) je kružnice (resp. bod). Těmito vlastnostmi se v našem pomocném textu nebudeme zabývat, ale ve vašem řešení je můžete používat (pokud je jejich platnost dostatečně zřejmá). Podobně se nebudeme zabývat objemy a povrchy různých těles.

Podívejme se na to

Matematiku děláme většinou na papíře nebo na obrazovce monitoru. Stejně tak lidské oči, ač dokáži rozpoznat i hloubku, vytváří spíše dvourozměrný obraz. Proto nám může zobrazení prostorového problému do roviny v mnohém pomoci. Uveďme si dva základní způsoby promítání:

Rovnoběžné promítání

Uvažme rovinu ρ a směr promítání daný přímkou p, která rovinu protíná. Pak rovnoběžné promítání směrem $\overrightarrow{p}$ je takové zobrazení, které libovolnému bodu A v prostoru přiřadí bod A' v rovině ρ takový, že přímky p a $\overleftrightarrow{AA'}$ jsou rovnoběžné.
Toto je nejčastěji používaný způsob promítání ve stereometrii a dá se s vhodnou volbou roviny a směru použít také k řešení různých úloh. Zobrazení nezachovává úhly (včetně pravých) ani délky stran, ale zachovává rovnoběžnost a dělící poměr (například střed úsečky se zobrazí na střed obrazu úsečky).

Příklad 4.1. Nechť $ABCD$ je obecný čtyřstěn (tedy body A, B, C, D jsou libovolné body prostoru neležící v jedné rovině). Těžnicí čtyřstěnu rozumíme přímku jdoucí jedním vrcholem a těžištěm protější strany. Ukažte, že všechny čtyři těžnice jdou jedním bodem.

Řešení. Uvažme rovnoběžné promítání do roviny ABC ve směru těžnice čtyřstěnu vrcholem D. V takovém případě se zřejmě bod D zobrazí na těžiště trojúhelníku ABC (označme D') a tedy hrany AD, BD, CD se zobrazí na příslušné těžnice ABC. Stejně tak zřejmě těžiště stěn BCD, CAD a ABD se zobrazí na těžiště trojúhelníků BCD', CAD', ABD', které zřejmě leží na příslušných těžnicích trojúhelníku ABC. Z toho vyplývá, že těžnice čtyřstěnu se také zobrazí na příslušné těžnice ABC a ty se navíc protínají v jediném bodě a to D', tedy těžnice z vrcholů A, B a C prochází přímkou DD' (pozor, nevyplývá z toho ještě, že jdou jedním bodem). Pokud by některé dvě těžnice protínaly přímku DD' v různých bodech, byly by tyto těžnice mimoběžné. Analogicky k předchozímu kroku však lze ukázat, že jedna musí druhou protínat. Tedy se musí všechny těžnice protínat v jediném bodě, což jsme chtěli dokázat.

Lineární perspektiva

Nechť ρ je rovina (průmětna) a bod O leží mimo ni. Lineární perspektiva je zobrazení, které každému bodu prostoru A ($A \neq O$) přiřadí bod $A' \in AO \cap \rho$.
Toto není způsob, jakým vidíme předměty v našem okolí, ale pokud nezobrazujeme příliš širokou oblast (širokou ve smyslu vrcholového úhlu kuželu, který ji obepíná), je to našemu vidění velice blízko. Lineární perspektiva nezachovává ani rovnoběžnost ani dělící poměr (zachovává se dvojpoměr), ale přímky se zobrazují opět na přímky a tři rovnoběžky se zobrazí buď opět na rovnoběžky (jsou-li rovnoběžné s průmětnou) nebo na přímky jdoucí jedním bodem.

Analytická geometrie

Stereometrické problémy je často obtížné řešit synteticky (tzn. klasickou argumentací o rovnoběžnostech, úhlech, shodnostech atd.), nicméně v mnoha problémech si můžeme vypomoci početně. Pro následující text zaveďme pravoúhlý souřadnicový systém, tedy každý bod A v prostoru je jednoznačně dán trojicí čísel x, y, z (píšeme $A[x, y, z]$), které udávají vzdálenost od počátku souřadnic ve směru příslušné osy.

Přímka parametricky

Uvažme body $A[a_x, a_y, a_z]$, $B[b_x, b_y, b_z]$. Pak přímka AB je množina všech bodů $P[x, y, z]$:

$$x = a_x + (b_x - a_x)t,$$
$$y = a_y + (b_y - a_y)t,$$
$$z = a_z + (b_z - a_z)t,$$

kde t je libovolné reálné číslo. Trojice $(b_y - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z)$ se pak nazývá směrový vektor přímky. Dvě přímky se směrovými vektory (k, l, m) a (k', l', m') jsou rovnoběžné (resp. totožné) právě tehdy, když existuje nenulové reálné číslo c tak, že $(k, l, m) = (ck', cl', cm')$. Tento zápis se nazývá parametricky zadaná přímka v prostoru.

Kolmý směr - vektorový součin

Následující pravidlo uvedeme bez důkazu, ale může velmi ulehčit hledání kolmic v případě řešení analytickou cestou.

Věta 4.2. *Nechť $u = (a, b, c)$ a $v = (d, e, f)$ jsou směrové vektory dvou nerovnoběžných přímek p a q. Pak každá přímka se směrovým vektorem $w = (bf - ce, cd - af, ae - bd)$ je kolmá na p i q. Její směrový vektor se nazývá vektorový součin a píšeme $w = u \times v$.*

Rovina parametricky

Uvažme body $A[a_x, a_y, a_z]$, $B[b_x, b_y, b_z]$, $C[c_x, c_y, c_z]$. Pak rovina ABC je množina všech bodů $P[x, y, z]$:

$$x = a_x + (b_x - a_x)t + (c_x - a_x)s,$$
$$y = a_y + (b_y - a_y)t + (c_y - a_y)s,$$
$$z = a_z + (b_z - a_z)t + (c_z - a_z)s,$$

kde t a s jsou libovolná reálná čísla. Tento zápis se nazývá parametriky zadaná rovina v prostoru.

Rovina rovnicí

V prostoru lze navíc rovinu zadat také pomocí rovnice. Nechť (a_x, a_y, a_z) je směrový vektor přímky p a $B[b_x, b_y, b_z]$ je libovolný bod. Pak rovina kolmá k p jdoucí bodem B je množina všech bodů $P[x, y, z]$ takových, že

$$(x - b_x)a_x + (y - b_y)a_y + (z - b_z)a_z = 0.$$

Tento zápis se nazývá obecná rovnice roviny.

Přímka rovnicemi

Parametrické rovnice nejsou jediný způsob, jak zadat přímku v prostoru. Protože průsečnice dvou rovin je přímkou, bude množina všech bodů splňujících dvě různé (nezávislé) obecné rovnice rovin právě průsečnice těchto rovin.

Řešením soustav výše uvedených rovnic můžeme najít průsečíky přímek nebo rovin (či jiných útvarů), hledat příčky mimoběžek, osy mimoběžek atd.

BRKOS Team 2014