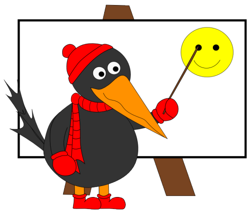
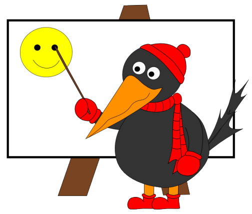


Pomocný text

GEOMETRICKÁ ZOBRAZENÍ



Shodná zobrazení

Shodná zobrazení patří k nejjednodušším zobrazením na rovině. Je jich však hrozně málo a často se stává, že musíme sáhnout i po jiných, někdy výrazně složitějších zobrazeních, o kterých se budeme bavit později. Nejprve si však představíme ta shodná:

Definice 2.1. *Nechť f je zobrazení roviny α na sebe, které zachovává délky (tj. zobrazí-li se úsečka AB na úsečku $A'B'$, pak $|AB| = |A'B'|$). Pak f je shodné zobrazení.*

Klasifikace shodných zobrazení:

1) Osová souměrnost je zobrazení dané přímkou o, které se říká osa souměrnosti. Obrazem bodu A v osové souměrnosti podle osy o je bod A', který splňuje: $AA' \perp o$ a zároveň střed úsečky AA' leží na ose o.
   Body ležící na ose o jsou samodružné (tj. zobrazují se samy na sebe).

2) Posunutí (translace) je zobrazení dané vektorem $\vec{v}$. Obrazem bodu A v posunutí o vektor $\vec{v}$ je bod A' takový, že $\vec{AA'} = \vec{v}$.
   Je-li vektor $\vec{v}$ nenulové délky, pak toto zobrazení nemá žádný samodružný bod.

3) Rotace (otočení) je zobrazení dané středem rotace S a úhlem ϕ. Obrazem bodu A v rotaci se středem S o úhel ϕ je bod A', kde velikost orientovaného úhlu ASA' je rovna velikosti úhlu ϕ a $|AS| = |A'S|$.
   Střed rotace je samodružný.

Poznámka. Každou shodnost lze vyjádřit jako složení několika osových souměrností.

Podobná zobrazení

Úlohy na podobná zobrazení se velmi často vyskytují v olympiádách a v jim podobných soutěžích. Jedná se o středoškolské učivo s dalekým využitím v geometrických úlohách.

Definice 2.2. *Nechť f je zobrazení roviny α na sebe, které zachovává poměry délek (tj. existuje konstanta $k > 0$ taková, že zobrazí-li se úsečka AB na úsečku $A'B'$, pak $|A'B'| = k \cdot |AB|$). Pak f je podobné zobrazení, konstantu k nazýváme koeficient podobnosti f.*

Klasifikace podobných zobrazení:

1) Shodnost Každé shodné zobrazení zachovává poměry délek a to s koeficientem podobnosti 1.
2) Stejnolehlost (homotetie) je zobrazení dané středem stejnolehlosti S a nenulovým koeficientem $k \in \mathbb{R}$. Obrazem bodu A v stejnolehlosti se středem S a koeficientem k je bod A' :
   a) Pokud $k > 0$, pak A' leží na polopřímce SA a platí $|SA'| = k \cdot |SA|$.
   b) Pokud $k < 0$, pak A' leží na polopřímce opačné k polopřímce SA a platí $|SA'| = -k \cdot |SA|$.

   Střed stejnolehlosti S je v tomto zobrazení samodružný bod.
3) Ostatní podobná zobrazení lze vždy vyjádřit jako složení homotetie s některou shodností.

Afinní zobrazení

Jistě se již každý z nás setkal s rovnoběžným přímočarým promítáním, které se užívá například ve stereometrii. Jde o zobrazení mezi dvěma rovinami definované takto:

Definice 2.3. *Nechť α, β jsou dané různoběžné roviny v prostoru $\mathbb{E}_3$. Dále zvolme přímku $p \in \mathbb{E}_3$ protínající obě roviny α, β. Nyní si definujme zobrazení f roviny α na rovinu β: Obrazem bodu $X \in \alpha$ v tomto zobrazení je bod $Y \in \beta$ takový, že $XY \parallel p$. Zobrazení f nazveme rovoběžné přímočaré promítání roviny α na rovinu β ve směru přímky p.*

Věta 2.1. *Rovnoběžné přímočaré promítání zachovává poměry obsahů - například poměr obsahů dvou trojúhelníků a poměr obsahů jejich obrazů v tomto zobrazení je stejný (důkaz je mimo rozsah tohoto textu). Obrazy dvou rovnoběžných přímek jsou opět rovnoběžky.*

Rovnoběžné přímočaré promítání poměrně dost souvisí s afinním zobrazením, které si definujeme v následujících odstavcích:

Definice 2.4. *Nechť V je libovolný bod v $\mathbb{E}_2$ a $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{E}_2$ dvojice lineárně nezávislých vektorů (tj. nerovnoběžných s nenulovou délkou). Bodu V nyní začneme říkat počátek. Trojice $(V, \vec{v_1}, \vec{v_2})$ se nazývá repér s počátkem V a vektory báze v_1, v_2.*

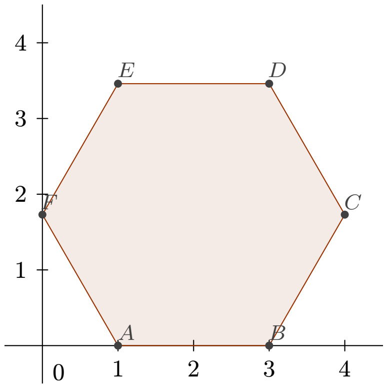
Poznámka. V případě výběru dvou na sebe kolmých vektorů se stejnou délkou 1 se jedná o kartézskou soustavu souřadnic.

Definice 2.5. *Nechť $(V, \vec{v_1}, \vec{v_2})$ je repér. Každé uspořádané dvojici reálných čísel $[k_1, k_2]$ přiřadíme bod K, do něhož se dostaneme z bodu V přičtením k_1-násobku vektoru $\vec{v_1}$ a k_2-násobku vektoru $\vec{v_2}$. Dvojici $[k_1, k_2]$ nazýváme souřadnice bodu K (v repéru $(V, \vec{v_1}, \vec{v_2})$).*

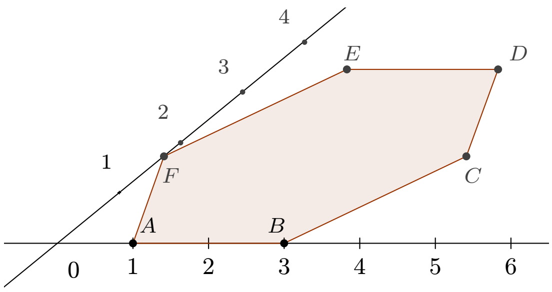
Není těžké si uvědomit, že takovéto přiřazení je bijektivní, a tedy i opačně jsme každému bodu roviny $\mathbb{E}_2$ jednoznačně přiřadili jeho souřadnice v repéru $(V, \vec{v_1}, \vec{v_2})$. (Například bodu V jsme přiřadili souřadnice $[0, 0]$.)

Definice 2.6. *Mějme dva různé repéry R_1, R_2 v rovině $\mathbb{E}_2$. Afinní zobrazení t určené repéry R_1, R_2 definujeme takto: libovolnému bodu $A \in \mathbb{E}_2$ se souřadnicemi $[l_1, l_2]$ v repéru R_1 je přiřazen bod $t(A) \in \mathbb{E}_2$ se stejnými souřadnicemi $[l_1, l_2]$, ale v repéru R_2.*

Jako příklad poslouží následující zobrazení:
Body A, B, C, D, E, F jsou v repéru $([0,0],(1,0),(0,1))$ vrcholy pravidelného šestiúhelníka, jak je vidět na prvním obrázku.



Pokud však jejich souřadnice zaznačíme v jiném repéru, dostaneme afinní obraz šestiúhelníka $ABCDEF$, jak je vidět na druhém obrázku:



Všimněme si, že obrazem libovolných dvou rovnoběžných přímek jsou opět rovnoběžky.

Věta 2.2. *Mějme množinu M_1 bodů v rovině s obsahem S_1, zaznačenou v repéru $R_1 = (V, v_1.v_2)$. Její afinní obraz v repéru $R_2 = (W, w_1, w_2)$ označme M_2 a jeho obsah S_2. Platí*

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{v_1 \times v_2}{w_1 \times w_2},$$

což je pro konkrétní afinitu vždy konstanta. Afinní zobrazení tedy zachovává poměry velikostí obsahů.

Nyní se dostáváme k tomu, jak spolu souvisí afinní zobrazení a rovnoběžné přímočaré promítání:

Věta 2.3. *Mějme různoběžné roviny $\alpha, \beta \in \mathbb{E}_3$. Každé zobrazení složené z rovnoběžného promítání roviny α na rovinu β následovaného rovnoběžným promítáním roviny β na rovinu α je afinní zobrazení na rovině α.*

Poznámka. V předešlém zobrazení se úsečka rovnoběžná s průsečnicí rovin α a β zobrazí na úsečku stejné délky. Užitím pouze dvou různoběžných rovin tedy nemůžeme dostat libovolné afinní zobrazení.

To, zda tři rovnoběžná přímočará promítání již postačí pro konstrukci libovolné afinity, nebo jich budeme v některých případech potřebovat více, necháme na rozmyšlení čtenáři.

BRKOS Team 2013

Kruhová inverze

Kruhová inverze je posledním zobrazením, kterým se zde budeme zabývat. Jde již o poměrně složitou transformaci roviny a může nám pomoci u geometrických úloh, kde se nám nedaří problém vyřešit předcházejícími prostředky. Typicky se užitím kruhové inverze dostaneme k výrazně odlišné situaci, která může být snáze rozřešitelná. Nepochybně tak patří k velmi užitečným zobrazením, které by měl maturant se zájmem o matematiku znát. Její ovládnutí pak vyžaduje léta cviku.

Poznámka. Rovinu $\mathbb{E}_2$ si doplníme o její nevlastní bod - nekonečno. Takto vzniklou množinu budeme označovat jako $\mathbb{E}_2^* = \mathbb{E}_2 \cup \{\infty\}$ Tato množina bodů má zajímavé vlastnosti - například přímky se zde chovají jako kružnice s nekonečným poloměrem a všechny přímky se protínají v nekonečnu.

Definice 2.7. *Je dána kružnice k se středem S a poloměrem $r > 0$. Nechť f je zobrazení $\mathbb{E}_2^*$ na $\mathbb{E}_2^*$, ve kterém se bod S zobrazí do nekonečna, nekonečno zase na bod S a každý bod $A \in \mathbb{E}_2, A \neq S$ se zobrazí na bod $A' \in \mathbb{E}_2$ tak, že A' leží na polopřímce SA a platí*

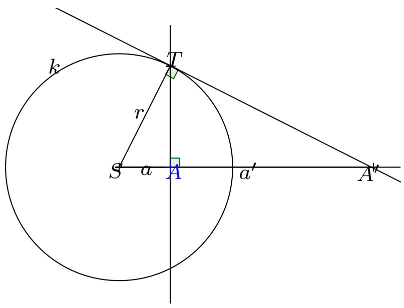
$$|SA| \cdot |SA'| = r^2.$$

Pak zobrazení f nazýváme kruhovou inverzí podle kružnice k.

Poznámka. Všechny body ležící na kružnici k jsou v kruhové inverzi podle kružnice k samodružné. To znamená, že zobrazujeme-li v tomto zobrazení objekt, který má s kružnicí k společný bod X, pak bude bod X náležet i obrazu tohoto objektu.

Věta 2.4. *Kruhová inverze je involutorní zobrazení, tedy když zobrazíme rovinu dvakrát v téže kruhové inverzi, dostaneme identitu.*

Věta 2.5. *Nechť k je kružnice se středem S a poloměrem r. Dále nechť $A \neq S$ je libovolný bod uvnitř kružnice k. Bodem A' nazvěme obraz bodu A v kruhové inverzi podle kružnice k. Zřejmě A' leží vně kružnice k. Označme T dotykový bod jedné z tečen ke kružnici k z bodu A'. Potom bod A je pata kolmice spuštěné z bodu T na přímku SA'.*



Důkaz. Označme a, resp. a' délku úsečky SA, resp. SA'. Protože A' je obrazem bodu A v kruhové inverzi s kružnicí k o poloměru r, platí $a \cdot a' = r^2$. Dále označme T_0 patu kolmice z bodu T na přímku SA'. Eukleidova věta o odvěsně ST v pravoúhlém trojúhelníku $SA'T$ nám říká, že

$$\begin{aligned} r^2 = |ST|^2 &= |ST_0| \cdot |SA'| = |ST_0| \cdot a'. \\ |ST_0| &= \frac{r^2}{a'}, \end{aligned}$$

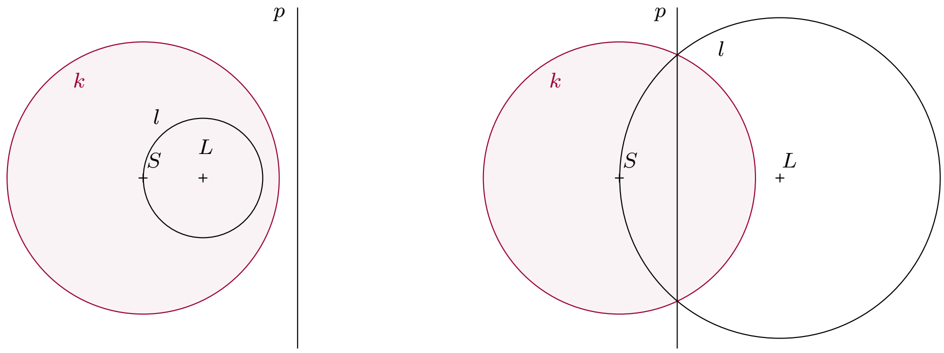
přičemž $\frac{r^2}{a'} = a$. Přitom zřejmě $T_0 \in SA'$. Proto $T_0 = A$, čímž je důkaz hotov. □

Následující větu uvádíme bez důkazu a je třeba si ji dobře promyslet. Obsahuje totiž nejdůležitější poznatky potřebné k úspěšnému užití kruhové inverze:

Věta 2.6. *Mějme kružnici k se středem S o poloměru r a zobrazme následující útvary v kruhové inverzi podle k :*

1) *Obrazem přímky p procházející středem kruhové inverze S je ta stejná přímka p.*

2) *Obrazem přímky p neprocházející bodem S je kružnice l se středem L procházející bodem S taková, že $SL \perp p$. Pokud má navíc přímka p s kružnicí k společný bod, leží tento bod i na kružnici l (je to totiž samodružný bod).*



3) *Obrazem kružnice l se středem L procházející bodem S je přímka p kolmá na přímku LS. (Plyne z předchozího a involutornosti kruhové inverze.)*

4) *Obrazem kružnice m neprocházející bodem S je kružnice n neprocházející bodem S. Pokud je navíc bod S vně kružnice m, pak mají kružnice m, n společné tečny a ty se protínají v bodě S.*