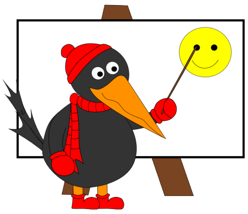
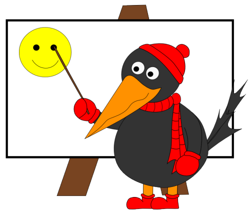


Pomocný text

Dirichletův princip



Dirichletův přihrádkový princip (někdy také zvaný princip holubníku) je jedním ze základních kombinatorických principů a nachází uplatnění téměř ve všech oblastech matematiky, od teorie čísel přes kombinatoriku a teorii grafů až po geometrii. Poprvé jej přímo použil Dirichlet v jeho práci z teorie čísel. Ve své nejjednodušší podobě se dá Dirichletův princip formulovat následovně:

Věta 1.1. *Nechť máme alespoň* $(n+1)$ *holubů v holubníku o* n *přihrádkách. Pak v některé přihrádce jsou alespoň dva holubi.*

A skutečně. Pokud by v každé přihrádce byl nejvýše jeden holub a přihrádek je n, pak by muselo být nejvýše n holubů. My ale máme o jednoho holuba více, což je spor. Musí tedy nutně alespoň v jedné přihrádce být dva holubi.
Poněkud zajímavější je obecnější podoba tohoto principu:

Věta 1.2. *Nechť máme alespoň* $(mn+1)$ *holubů v holubníku o* n *přihrádkách. Pak v některé přihrádce je alespoň* $(m+1)$ *holubů.*

Důkaz je velmi podobný. Pokud by v každé přihrádce bylo nejvýše m holubů, celkem by jich bylo nejvýše mn, což je spor. V některé přihrádce tedy musí být alespoň $(m+1)$ holubů.
Princip sám o sobě je velice jednoduchý a snadno pochopitelný. Poněkud obtížnější je to s jeho užitím. V úloze je vždy potřeba najít ty správné „holuby a přihrádky", abychom princip mohli použít. Na ukázku si tedy pár vzorových příkladů vyřešíme:

Příklad 1.1. Ukažte, že v každé skupině lidí jsou vždy alespoň dva, kteří mají v této skupině stejný počet známých (známost je vzájemná).

Řešení. Umisťujme jednotlivé lidi do přihrádek podle toho, kolik mají známých. Je-li lidí dohromady n, budou obsazovat přihrádky s čísly 0, $1,\dots,(n-1)$. Avšak známost je vzájemná, a tedy nemůže být zároveň obsazena přihrádka s číslem 0 i $(n-1)$. Máme tedy celkem n lidí v $(n-1)$ přihrádkách, a tudíž dle Dirichletova principu někteří dva lidé musí mít stejný počet známých.

Příklad 1.2. Nechť S je množina 2013 bodů takových, že mezi každými třemi body jsou alespoň dva, jejichž vzdálenost je menší než jedna. Dokažte, že z množiny S lze vybrat 1007 bodů, které všechny leží uvnitř kruhu o poloměru jedna.

Řešení. Z množiny S vyberme ty dva body, které mají největší vzájemnou vzdálenost (označme je A a B). Pokud je jejich vzájemná vzdálenost menší než jedna, musí být každý bod vzdálen od bodu A o méně než jedna, takže v kruhu o poloměru jedna a středem v A leží všech 2013 bodů. Pokud je jejich vzdálenost větší než jedna, uvažme libovolný další bod (označme ho X). Protože z trojice $\{A, B, X\}$ musí některé dva mít vzdálenost menší než jedna, musí platit buď $|AX| < 1$, nebo $|BX| < 1$. Máme tedy celkem 2011 bodů, které leží „blízko" bodu A nebo bodu B. V kruhu o poloměru jedna kolem jednoho z těchto dvou bodů tedy musí být dle Dirichletova principu alespoň 1006 bodů, které tak společně s bodem A, resp. B tvoří oněch hledaných 1007.

Příklad 1.3. Na tabuli je za sebou napsáno 2013 přirozených čísel. Ukažte, že z nich lze vybrat několik (alespoň jedno) po sobě napsaných tak, že jejich součet je dělitelný 2013.

Řešení. Označme jednotlivá čísla (tak, jak jdou za sebou) a_1, a_2,... a_{2013}. Uvažme součty

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ &\vdots \\ s_{2013} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{2013}. \end{aligned}$$

Je-li mezi nimi některý dělitelný 2013, pak jsme vyhráli. Není-li tomu tak, potom některé dva musí dle Dirichletova principu dávat stejný zbytek po dělení 2013 (možných nenulových zbytků je totiž pouze 2012). Označme tyto dva $s_i = 2013m + r$ a $s_j = 2013n + r$, přičemž $i < j$. Rozdíl těchto dvou bude tvaru $s_j - s_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j = 2013(n - m)$ a je tedy dělitelný 2013. Navíc se jedná o součet některých po sobě napsaných čísel, čímž je důkaz hotov.