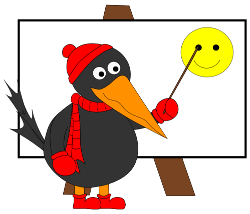
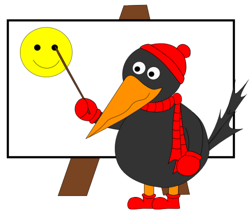


Pomocný text

Extrémní série



V tejto sérií sa budeme zaoberať maximami a minimami – teda extrémami. Hľadanie extrémov je súčasťou každodenného života, príkladom môže byť hľadanie najlacnejšieho obchodu, najrýchlejšej cesty domov, najefektívnejšieho využitia voľného času, atď. Pokiaľ sa nám podarí tieto problémy previesť do reči matematiky, môžeme ich s rôznou úspešnosťou riešiť a v praxi aplikovať.

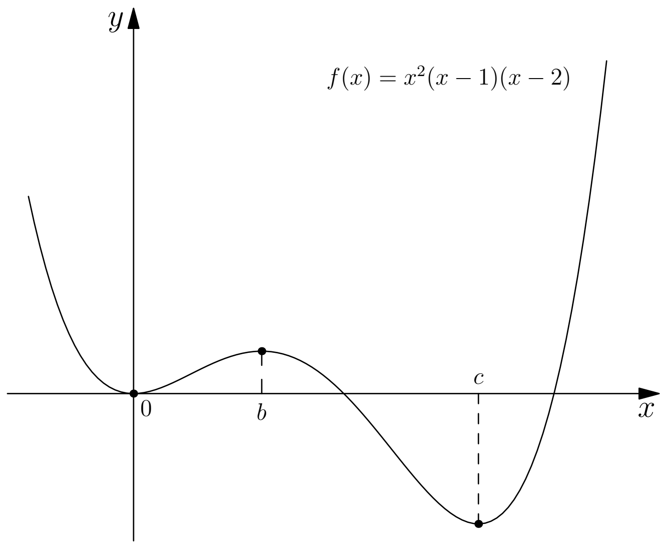
Ešte pred tým, ako začneme takéto problémy riešiť si rýchlo pripomenieme, čo to vlastne minimum a maximum funkcie je:

Definícia 6.1. Majme funkciu $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Hovoríme, že funkcia má v bode x_0:

- *Lokálne (neostré) minimum*, ak existuje δ také, že pre akékoľvek x z intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ platí, že $f(x) \geq f(x_0)$. Inak povedané, okolo lokálneho minima sa musia nachádzať už iba také x, ktoré sa zobrazujú na väčšiu (nanajvýš rovnakú) hodnotu. Toto okolie môže byť aj veľmi malé.
- *Globálne (neostré) minimum*, ak pre ľubovoľné x z definičného oboru $D(f) - \{x_0\}$ platí, že $f(x) \geq f(x_0)$.

Pre maximum by sme znamienka otočili, pre ostré minimá by sme neostrú nerovnosť nahradili ostrou.

Poznámka. Všimnime si niekoľko jasných vecí – lokálnych extrémov môže byť vo všeobecnosti veľa (napr. aj nekonečne pri funkcií $\sin(x)$), ale zrovna tak aj žiadny. Globálny extrém môžeme mať iba jediný. Taktiež však nemusíme mať žiadny (dokonca ani vtedy, keď máme nekonečne veľa lokálnych). Príkladom môže byť funkcia $\sin(x) + x$, ktorá má nekonečne veľa extrémov a to maximá v $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ a minimá v $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ (pre $k \in \mathbb{Z}$), pričom však nie je nijak ohraničená. Samotná funkcia $\sin(x)$ má pritom pre všetky zmienené hodnoty globálne extrémy (a teda je ich nekonečne veľa), ale iba neostré. Taktiež si môžeme všimnúť, že pri hľadaní extrémov nás nebude nejak špeciálne zaujímať, či sa jedná o minimum alebo maximum, keďže to, čo je pre $f(x)$ minimom je pre $-f(x)$ maximom. Uvedené situácie si môžeme ilustrovať na príklade funkcie $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$, ktorá má podľa nasledujúceho obrázku 6.1 lokálne minimum na intervale $(-1, b)$ v bode 0, na intervale $(b, c+1)$ v bode c, ktoré je zároveň globálnym minimom funkcie $f(x)$ na $\mathbb{R}$. Uvedená funkcia má zrejme lokálne maximum na intervale (a, c) v bode b, ktoré však nie je globálnym maximom.



Obr. 6.1: Graf funkcie $f(x)$.

Veta 6.1. Nech f, $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sú funkcie, pričom $T(x)$ je prostá, čiže

$$T(x) = T(y) \Rightarrow x = y,$$

inak povedané, ak dve čísla majú rovnaké obrazy, v skutočnosti je to tým, že sa rovnajú, resp. dve rôzne čísla majú rôzne funkčné hodnoty. Potom $f(x)$ má extrém v x_0 práve vtedy, keď $T(f(x))$ má extrém v x_0.

Z tejto vety plynie, že extrémy funkcie sú odolné napríklad voči tzv. lineárnym transformáciám funkcie, čiže $f(x)$ má extrémy v tých istých bodoch ako funkcia $g(x) = af(x) + b$, kde a, b sú reálne čísla, pričom a je nenulové (aby táto transformácia bola prostá). Je treba však dohliadať na to, aby sa funkcie dali skladať, teda pokiaľ $T(f) = \ln(f)$, musíme si byť istí, že $f(x)$ zobrazuje čísla na kladné čísla.
Teraz si však už môžeme zadefinovať, aké úlohy nás budú trápiť. Typickým zadaním úlohy optimalizácie je:

$$f(x) \to min, \quad x \in G \subseteq D(f).$$

To znamená, že hľadáme minimum z funkcie $f(x)$ (ktorá sa nazýva *účelová funkcia*), pričom však x nemôže utiecť z nejakej množiny G. Pokiaľ je táto rovnaká ako definičný obor funkcie, jedná sa o *optimalizáciu bez obmedzení.* Ak je táto množina menšia, je možné, že nám niektoré extrémy nepovolí uvažovať ako riešenia. Vtedy sa jedná o *optimalizáciu s obmedzeniami.* Táto úloha je pritom častejšia, keďže väčšinou pri úlohách nemôžeme uvažovať niektoré riešenia.

Príklad 1 (optimalizácia bez obmedzení)**.** Nájdite minimum funkcie

$$f(x) = 2 - \frac{12}{x-4} + \frac{18}{(x-4)^2}.$$

Riešenie. Ako prvé si všimneme, že hľadáme extrém na množine $G = \mathbb{R} - \{4\}$. Keďže sme leniví, spravíme transformáciu $x - 4 = c$ a prevedieme na jeden zlomok, čím dostávame novú úlohu:

$$g(c) = \frac{2c^2 - 12c + 18}{c^2} \to min, \quad G = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Následne funkciu upravíme na štvorec:

$$g(c) = \frac{2(c-3)^2}{c^2}.$$

Keďže táto funkcia je určite nezáporná, tak jediným možným minimom je $c = 3$, jedine pre ktoré nadobúda funkcia hodnoty $g(3) = 0$. Riešením je teda $x = 7$. Hodnota minima je $f(7) = 0$.

Ešte pred tým, než sa poberieme na ďalší príklad si pripomenieme nerovnosť, ktorá v mnohých prípadoch uľahčí optimalizáciu.

Veta 6.2 (Aritmeticko-geometrická nerovnosť)**.** Uvažujme premenné a_1, a_2, $...a_n$, ktoré sú všetky nezáporné (teda $a_i \geq 0$). Potom pre ne platí:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n},$$

čiže aritmetický priemer je vždy väčší, nanajvýš rovný geometrickému. Rovnosť nastáva iba v prípade, že $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Preto nie je zlé svojich učiteľov požiadať, aby priemer známok rátali pomocou geometrického priemeru :).

Príklad 2 (optimalizácia s obmedzeniami)**.** Zistite, aký najväčší obsah môže mať trojuholník s obvodom o.

Riešenie. Pri podobných príkladoch je úloha zadaná jednoducho, zápis optimalizačnej úlohy však môže byť docela náročný. Musíme si totiž uvedomiť tri veci:

- Akým spôsobom budeme rátať obsah. Keďže v úlohe nemáme žiadne uhly (a kvôli sínusom a kosínusom ich tam ani nechceme), použijeme Heronov vzorec na výpočet trojuholníka so stranami a, b, c a obvodom o:

$$S = \sqrt{\frac{o}{2}\left(\frac{o}{2} - a\right)\left(\frac{o}{2} - b\right)\left(\frac{o}{2} - b\right)}.$$

- Nesmieme zabudnúť, že dĺžky strán v trojuholníku sú kladné, teda $a, b, c > 0$. Teoreticky by sa nám mohlo totiž stať, že maximum výjde tak, že jedna strana by mala zápornú dĺžku. Preto musíme pridať toto obmedzenie.

- Ľubovoľné tri kladné strany ešte netvoria trojuholník. Opäť by sa mohlo stať, že maximum bude v bode $(a,\ b,\ c) = \left(\frac{o}{5},\ \frac{o}{5},\ \frac{3o}{5}\right)$, aj keď trojuholník s takými stranami neexistuje. Preto musíme pridať trojuholníkové nerovnosti.

Formulujme teda konečne úlohu do matematického zápisu:

$$f(a,\ b,\ c) = S = \sqrt{\frac{o}{2}\left(\frac{o}{2} - a\right)\left(\frac{o}{2} - b\right)\left(\frac{o}{2} - c\right)} \to max; \text{ kde}$$
$$a, b, c > 0, \quad a + b > c, \quad a + c > b, \quad b + c > a.$$

Táto úloha vyzerá hrozivo, je však nutné vidieť, že obmedzenia nám uľahčia život. V prvom rade vidíme, že všetky členy pod odmocninou sú kladné, keďže vďaka prvej podmienke je obvod kladný a vďaka štvrtej podmienke $b + c - a > 0$ je napríklad

$$\frac{o}{2} - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{-a+b+c}{2} = \frac{1}{2}(b + c - a) > 0.$$

To znamená nielen to, že máme korektne definovaný obsah, ale aj to, že keďže $T(x) = \sqrt{x}$ je prostá funkcia, tak môžeme rovno optimalizovať druhú mocninu obsahu S^2. Pre tú ale z aritmeticko-geometrickej nerovnosti (a vďaka nezápornosti jednotlivých členov) platí:

$$\begin{aligned} S^2 = \frac{o}{2}\left(\frac{o}{2}-a\right)\left(\frac{o}{2}-b\right)\left(\frac{o}{2}-c\right) &\le \frac{o}{2}\left[\frac{\frac{o}{2}-a+\frac{o}{2}-b+\frac{o}{2}-c}{3}\right]^3 \\ &\le \frac{o}{2}\left[\frac{\frac{3}{2}o-(a+b+c)}{3}\right]^3 = \frac{o}{2}\left[\frac{o}{6}\right]^3 = \frac{o^4}{432}. \end{aligned}$$

Keďže rovnosť nastáva v prípade $\frac{o}{2} - a = \frac{o}{2} - b = \frac{o}{2} - c$, tak musí platiť, že hľadaný trojuholník je rovnostranný. Obsah takéhoto trojuholníka je $S = \frac{o^2}{12\sqrt{3}}$.

Lineárne programovanie

Zatiaľ sme sa zaoberali iba optimalizačnými úlohami, ktoré sa dali nejakým spôsobom jednoducho obmedziť nerovnicami a to dokonca tak, že sme z nich rovno prišli na extrém. Teraz si predstavíme najjednoduchšiu podobu tzv. simplexovej metódy, čo je algoritmus na hľadanie extrémov úloh lineárneho programovania. Teraz prejdeme k funkciám viacerých premenných, ktoré sa zobrazujú na jednu reálnu hodnotu. V takýchto prípadoch je náš cieľ optimalizovať stále jednoznačný – nájsť bod (s viacerými súradnicami), ktorý sa zobrazuje na čo najextrémnejšiu hodnotu. Úloha lineárneho programovania je optimalizačná úloha, v ktorej je účelová funkcia lineárna funkcia premenných $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a obmedzenia sú tvaru $f_k(a_1, ..., a_n) > 0$, kde f_k sú lineárne funkcie.

Lineárne programovanie má aj svoj geometrický význam. Jednotlivé obmedzenia totiž generujú mnohosten, na ktorom sa majú riešenia nachádzať. Tento mnohosten môže mať aj nekonečne dlhé strany. Keďže optimalizovaná funkcia je lineárna, dá sa dokázať, že optimálne body nájdeme vo vrcholoch tohto mnohostenu, prípadne v jeho hranách (ak teda existujú). Nasledujúci spôsob riešenia lineárnych problémov je vlastne algoritmus, ktorý tieto vrcholy prechádza a z nich potom smeruje do vrcholov, ktoré sú optimálnejšie.

Všimnite si, že naše predchádzajúce príklady boli oveľa zložitejšie – účelová funkcia bola buď kvadratická alebo dokonca polynomiálna pod odmocninou, čiže sa jedná o veľmi špecifické problémy. Na druhej strane nám úlohy lineárneho programovania často vzniknú z na prvý pohľad veľmi odlišných problémov, tak ako uvidíte v tejto sérií :).

Namiesto zdĺhavého vysvetľovania simplexovej metódy si ukážeme na príklade, ako robiť systematické kroky k tomu, aby sme videli riešenie niektorých lineárnych problémov.

Príklad 3 (lineárna optimalizácia s rovnosťou). Nájdite minimum funkcie

$$f(a,\, b,\, c,\, d) = a + 2b + 2c - 7d$$

tak, aby

$$a + b + 3c - d = 6, \tag{6.1}$$

$$2a - b + 3c - 8d = 9, \tag{6.2}$$

pričom $a,\, b,\, c,\, d \ge 0$.

Riešenie. Pri úlohách lineárneho programovania je dobrým zvykom začať nájdením tzv. prípustného riešenia, teda takého, ktoré splňuje všetky podmienky, ale zároveň nemusí byť ešte najlepšie. Skúsme teda rovnice vyriešiť čiastočne pre premenné a, b.

$$a + 2c - 3d = 5, \tag{6.3}$$
$$b + c + 2d = 1, \tag{6.4}$$

kde rovnosť (6.3) vznikla vydelením súčtu rovností (6.1) a (6.2) tromi, a podobne rovnosť (6.4) vznikla vydelením súčtu (6.2) dvojnásobku (6.1). Z čoho môžeme vyjadriť premenné $a = 5-2c+3d$ a $b = 1-c-2d$ dosadiť do účelovej funkcie, čím dostaneme $7-2c-8d \to min$. Teda naše počiatočné riešenie môže byť $(a, b, c, d) = (5, 1, 0, 0)$ s hodnotou účelovej funkcie 7. Teraz je však vidno, že v účelovej funkcií by sme sa mohli dostať aj na nižšie čísla, keďže koeficient pri premenných c aj d je záporný. Najprv riešme situáciu s c (čo nám možno vyrieši aj zápornosť koeficientu u d). Problém však je, že c nemôžeme zvýšiť ľubovoľne a ak by zostalo $d = 0$, potom $b = 1 - c + 2d = 1 - c$ a keďže b nemôže byť záporné, tak by mohlo byť c najviac 1. Všimnime si, že podobný problém by nastal aj pri $a = 5 - 2c$, z ktorého vyplýva, že $c \leq \frac{5}{2}$ (pri $d = 0$). Teda pri premennej b narazíme skôr, z čoho vyplýva, že to je horšia premenná pre minimalizáciu. Poďme preto ďalej s úpravami a to tak, že sa pokúsime vyjadriť premenné a, c:

$$a - 2b - 7d = 3, \tag{6.5}$$
$$b + c + 2d = 1,$$

kde (6.5) je rozdielom (6.3) a dvojnásobku (6.4). Z čoho opäť vyjadríme premenné $a = 3 + 2b + 7d$ a $c = 1 - b - 2d$. Účelová funkcia má teraz tvar $5 + b - 6d \to min$. Vidíme, že tým, že sme nahradili premenné, sme sa dostali k lepšiemu prípustnému riešeniu $(a, b, c, d) = (3, 0, 1, 0)$. Je to preto, lebo sme nahradili premennú b za takú premennú, ktorá zni¸ovala účelovú funkciu a dokázali sme jej priradiť väčšiu hodnotu ako 0. Teraz sa však nachádzame v podobnej situácií. Môžeme totiž ďalej znížiť účelovú funkciu, keďže koeficient pri d je záporný. Opäť si nemôžeme dovoliť akokoľvek zvýšiť d. Tentokrát nám dokonca v premennej a neprekáža, že zvýšime d, keďže táto premenná bude nezáporná pre ľubovoľne veľké nezáporné d. Problém je však s premennou c, ktorá zrejme uberá príliš málo z účelovej funkcie. Vyjadrime preto znova, tentokrát pomocou a, d:

$$a + \frac{3}{2}b + \frac{7}{2}c = \frac{13}{2}, \tag{6.6}$$
$$\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + d = \frac{1}{2}, \tag{6.7}$$

kde (6.6) je súčtom (6.5) a $\frac{7}{2}$-násobku rovnice (6.4), a tiež (6.7) je $\frac{1}{2}$-násobkom (6.4). Je vidno, že dostaneme $a = \frac{13}{2} - \frac{3}{2}b - \frac{7}{2}c$ a $d = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Účelová funkcia je $2+4b+3c \to min$. V tomto rozpoložení je už jasné, že zvýšením premenných b, c si len poškodíme. Preto ich nastavíme na najmenšiu možnú hodnotu – 0. Riešením, tentokrát už optimálnym, bude teda $(a, b, c, d) = (\frac{13}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$ s optimálnou hodnotou **3**.

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů, která je součástí IPN Podpora technických a přírodovědných oborů (PTPO), reg.č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005. Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

www.generaceY.cz; www.reformy-msmt.cz

BRKOS Team 2013