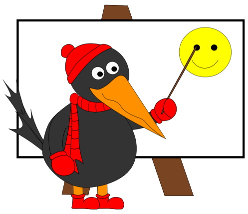
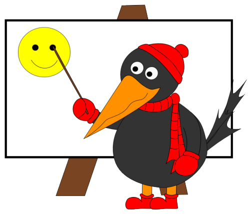


Pomocný text

Hmotné body



Hmotný bod je zjednodušeně řečeno bod, který má nějakou hmotnost. Pod pojmem hmotnost si můžeme představit hmotnost tak, jak ji známe – pokud bychom dali tento bod na váhu, číslo nám řekne, jaká je hmotnost bodu; hmotnější body je těžší roztlačit, atd. Také ale můžeme hmotnost považovat za číselnou charakteristiku daného bodu a nic víc o ní vědět nepotřebujeme.

Definice 5.1. *Hmotným bodem rozumíme dvojici* (A, m)*, kde* A *je libovolný bod v rovině (prostoru) a* m *je libovolné reálné číslo (může být i nulové nebo záporné). Tento hmotný bod pak zkráceně označujeme jako* mA *a množinu (pro naše účely konečnou) hmotných bodů nazveme pojmem hmotný systém. Podsystém je poté libovolná podmnožina nějakého hmotného systému.*

Těžiště v matematice (geometrii) je bod v trojúhelníku, který je společným průsečíkem těžnic – spojnic vrcholů a středů protějších stran. Ve fyzice má však těžiště jiný význam. Je to bod, který v gravitačním poli odpovídá působišti gravitační síly. Pokud je toto gravitační pole navíc homogenní (ve všech místech stejné), splývá těžiště s tzv. hmotným středem. Vlastnosti hmotného středu (dále jej budeme nazývat těžiště) se dají s výhodou použít v mnoha problémech geometrie. Podívejme se tedy na to, co to těžiště vlastně je.

Definice 5.2. *Nechť je v rovině dán hmotný systém* n *hmotných bodů* $m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n$ *o souřadnicích* $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_n, y_n]$*. Pak těžištěm této množiny nazveme hmotný bod* mT *pro který platí* $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ *a souřadnice bodu* T *jsou*

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$$
$$y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

Z této konstrukce navíc vyplývá, že každá množina hmotných bodů má právě jedno těžiště.

Nyní je na čase formulovat nějaká tvrzení, pomocí kterých poté budeme řešit příklady.

Věta 5.1. *Nechť* M *je hmotný systém a* C *jeho libovolný podsystém. Pak jestliže nahradíme všechny prvky podsystému* C *jeho těžištěm* t_CT_C*, těžiště systému* M *zůstane nezměněno. (Neboli: libovolný počet hmotných bodů lze zaměnit za jejich těžiště, aniž bychom změnili těžiště celého systému.)*

Důkaz. Označme si hmotné body ležící v C jako $m_1C_1, \dots, m_nC_n$, jejich souřadnice jako $[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$ a body neležící v C, ale ležící v M jako $\mu_1M_1, \dots, \mu_kM_k$ se souřadnicemi $[u_1, v_1], \dots, [u_n, v_n]$. Pak těžiště systému C má hmotnost $t_C = m_1 + \cdots + m_n$, těžiště systému M má hmotnost $t_M = m_1 + \cdots + m_n + \mu_1 + \cdots + \mu_k$. Po záměně prvků systému C za jeho těžiště bude celková hmotnost opět zřejmě $t_{M_2} = m_1 + \cdots + m_n + \mu_1 + \cdots + \mu_k = t_M$. Poloha těžiště systému C je $T_C = [x_C, y_C]$:

$$x_C = \frac{m_1x_1 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + \cdots + m_n},$$
$$y_C = \frac{m_1y_1 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + \cdots + m_n}.$$

Obdobně poloha těžiště systému M je $T_M = [x_M, y_M]$:

$$x_M = \frac{m_1x_1 + \cdots + m_nx_n + \mu_1u_1, \ldots, \mu_ku_k}{m_1 + \cdots + m_n + \mu_1, \ldots, \mu_k},$$
$$y_M = \frac{m_1y_1 + \cdots + m_ny_n + \mu_1v_1, \ldots, \mu_kv_k}{m_1 + \cdots + m_n + \mu_1, \ldots, \mu_k}.$$

Dále pro souřadnice těžiště systému M po záměně prvků systému C za jeho těžiště platí:

$$x_{M_2} = \frac{t_Cx_C + \mu_1u_1, \ldots, \mu_ku_k}{m_1 + \cdots + m_n + \mu_1, \ldots, \mu_k},$$
$$y_{M_2} = \frac{t_Cy_C + \mu_1v_1, \ldots, \mu_kv_k}{m_1 + \cdots + m_n + \mu_1, \ldots, \mu_k}.$$

Po dosazení za t_C, x_C, y_C:

$$x_{M_2} = \frac{m_1x_1 + \cdots + m_nx_n + \mu_1u_1, \ldots, \mu_ku_k}{m_1 + \cdots + m_n + \mu_1, \ldots, \mu_k},$$
$$y_{M_2} = \frac{m_1y_1 + \cdots + m_ny_n + \mu_1v_1, \ldots, \mu_kv_k}{m_1 + \cdots + m_n + \mu_1, \ldots, \mu_k}.$$

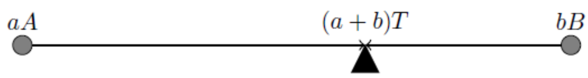
Tudíž také souřadnice těžiště zůstaly záměnou nezměněny, což jsme chtěli dokázat.

Analogicky se dá také dokázat, že můžeme libovolný hmotný bod v systému nahradit systémem hmotných bodů, jehož těžiště je totožné s daným hmotným bodem. Z důkazu je také vidět, že přidáním (či odebráním) podsystému C do (ze) systému M, jehož těžiště má stejnou polohu jako těžiště systému M, se poloha těžiště systému nezmění.
Následující věta je nejspíš nejdůležitější nástroj pro řešení planimetrických úloh metodou hmotných bodů.

Věta 5.2. *Nechť jsou dány dva hmotné body aA, bB takové, že $A \neq B$. Pak pro jejich těžiště $(a+b)T$ platí $T \in \overleftrightarrow{AB}$,*

$$a \cdot |\overrightarrow{AT}| + b \cdot |\overrightarrow{BT}| = 0$$

Pod označením $|\overrightarrow{AT}|$, resp. $|\overrightarrow{BT}|$ chápeme orientovanou vzdálenost. Co do velikosti je totožná s klasickou vzdáleností. Navíc však mají vzdálenosti opačná znaménka pokud míří „opačným“ směrem (tedy T leží mezi A a B) a stejná znaménka, pokud míří stejným směrem (T leží mimo úsečku AB).
Rovnost se dá také napsat jako $\frac{a}{b} = \frac{|\overrightarrow{TB}|}{|\overrightarrow{AT}|} = (TAB)$, kde (TAB) je tzv. dělící poměr.



Důkaz. Zvolme si souřadnicovou soustavu tak, že souřadnice bodu A jsou $[0,0]$ a souřadnice bodu B jsou $[1,0]$. Pak souřadnice těžiště budou

$$x_T = \frac{a \cdot 0 + b \cdot 1}{a+b} = \frac{b}{a+b},$$
$$y_T = \frac{a \cdot 0 + b \cdot 0}{a+b} = 0.$$

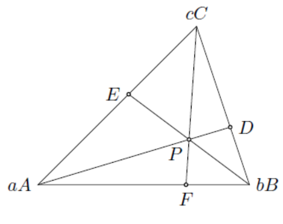
Platí tedy $|\overrightarrow{AT}| = \frac{b}{a+b} - 0$, $|\overrightarrow{BT}| = \frac{b}{a+b} - 1 = \frac{-a}{a+b}$, zřejmě tedy platí také $a \cdot |\overrightarrow{AT}| + b \cdot |\overrightarrow{BT}| = 0$, což jsme chtěli dokázat.

Na závěr si uvedeme ještě jednu definici, která nám značně zjednoduší zápis.

Definice 5.3. *Nechť aA, bB, cC, dD jsou hmotné body a k libovolné reálné číslo. Pak definujme operaci sčítání, pro kterou platí $aA + bB = cC$ právě tehdy, když $a + b = c$ a zároveň je cC těžištěm bodů aA, bB. Dále definujme násobení jako $k \cdot aA = dD$ právě tehdy, když $A = D$ a zároveň $d = ka$.*

Lze dokázat, že tyto operace se chovají velice podobně jako běžné sčítání a násobení. Tedy např. $aA + (-aA) = 0A$, $aA + bB = bB + aA$, $k(aA + bB) = kaA + kbB$, dvě různé rovnosti se dají sčítat, atd. Nyní už je ten správný čas uvést si nějaký příklad. Dokážeme například, že nějaké tři přímky v trojúhelníku se protínají v jednom bodě.

Příklad 1. Nechť body D, E, F značí body dotyku kružnice vepsané stranám BC, CA, AB trojúhelníku ABC. Dokažte, že přímky AD, BE, CF se protínají v jednom bodě.
Trojúhelníky AFE, BDF, CED jsou zřejmě rovnoramenné, neboli $|AE| = |AF| = x$, $|BF| = |BD| = y$, $|CD| = |CE| = z$. Uvažme nyní hmotné body aA, bB, cC. Položme $a = yz, b = zx, c = xy$. Pak platí $aA + bB = (a+b)F$, neboť $a|\overrightarrow{AF}| + b|\overrightarrow{BF}| = a \cdot x - b \cdot y = yz \cdot x - zx \cdot y = 0$. Tudíž těžiště trojice hmotných bodů aA, bB, cC – $aA + bB + cC = (a+b)F + cC$ leží na přímce CF. Obdobně se ukáže, že těžiště této trojice leží na přímce AD i BE. Jelikož však těžiště leží v jediném bodě, musí tyto tři přímky tímto bodem procházet.
Podobně se protínání v jediném bodě dá ukázat například pro těžnice (s hmotnostmi $1, 1, 1$) nebo pro výšky (s hmotnostmi $\cos\beta \cdot \cos\gamma$, $\cos\gamma \cdot \cos\alpha$, $\cos\alpha \cdot \cos\beta$).



Obrázek 5.1: K příkladům 1 a 2

Příklad 2. Nechť ABC je trojúhelník, $D \in BC$, $E \in CA$, $F \in AB$ a platí $\frac{|BF|}{|AF|} = 2$, $\frac{|BD|}{|CD|} = 4$. Nechť P je průsečík CF a AD. Určete $\frac{CP}{PF}$.
Najděme hmotné body aA, bB, cC tak, aby platilo $aA + bB = (a+b)F$ a $bB + cC = (b+c)D$. Musí tedy platit $\frac{a}{b} = \frac{|BF|}{|AF|} = 2$ a $\frac{c}{b} = \frac{|BD|}{|CD|} = 4$. Řešením těchto dvou rovnic dospějeme např. k řešení $a = 2$, $b = 1$, $c = 4$. Pak ale platí, že $aA + bB + cC = (a+b+c)P = (a+b)F + cC$ a tedy $\frac{|CP|}{|PF|} = \frac{a+b}{c} = \frac{3}{4}$.

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů, která je součástí IPN Podpora technických a přírodovědných oborů (PTPO), reg.č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005. Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

`www.generaceY.cz`; `www.reformy-msmt.cz`

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

GENERACE

TECHNICKÉ A PŘÍRODOVĚDNÉ VZDĚLÁVÁNÍ

ZÁŽITEK S BONUSEM → KARIÉRY → PRESTIŽE → ZAJIŠTĚNÍ

www.generaceY.cz

BRKOS Team 2013