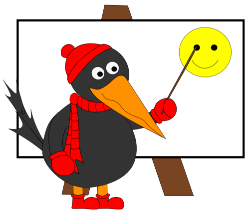
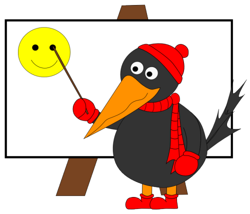


Pomocný text

MATEMATICKÁ INDUKCE



Matematická indukcia je dôležitá dokazovacia technika, s ktorou sa stretávame azda v každej oblasti matematiky a informatiky. Základným typom tvrdení, ktoré dokazujeme matematickou indukciou, sú tvrdenia tvaru „Pre každé prirodzené (celé) číslo $n \geq k_0$ platí $T(n)$“, kde k_0 je nejaké pevné číslo (zvyčajne 0 alebo 1) a $T(n)$ je nejaké tvrdenie parametrizované číslom n. Matematická indukcia využíva fakt, že k dôkazu horeuvedeného tvrdenia stačí overiť platnosť dvoch tvrdení - prvým je platnosť $T(n)$ pre najmenšiu hodnotu k_0, dokazujeme teda $T(k_0)$ (tejto časti dôkazu hovoríme *báza*). Druhým tvrdením je, že pre ľubovoľné $k \geq k_0$ z pravdivosti $T(k)$ (*indukčný predpoklad*) vyplýva aj pravdivosť $T(k+1)$ (*indukčný krok*). Ak sa nám teda podarí dokázať tieto dve tvrdenia, máme vyhrané. Správnosť tohto postupu je zrejmá - z prvého tvrdenia máme $T(k_0)$, tým pádom vďaka druhému tvrdeniu platí aj $T(k_0+1)$, z toho $T(k_0+2)$ a tak ďalej pre všetky $n \geq k_0$. Princíp matematickej indukcie si možno predstaviť ako padajúce domino - ak zhodíme prvý diel a každý diel má svojho nasledovníka dosť blízko na to, aby svojím pádom spôsobil aj jeho pád, postupne spadnú všetky diely bez ohľadu na to, koľko ich je.

Příklad 1. Dokážte, že pre každé $n \geq 1$ platí $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$

Řešení. *Báza*: Za n dosadíme jedničku, tým pádom sa tvrdenie zredukuje na $1 = 1^2$, čo je triviálne pravdivé.

Indukčný predpoklad: Predpokladáme tvrdenie pre k, teda že $1+3+\ldots+(2k-1) = k^2$

Indukčný krok: Chceme dokázať vetu pre $k+1$, dokazujeme teda rovnosť $1+3+\ldots+2(k+1)-1 = (k+1)^2$. Ľavú stranu možno rozpísať na $1+3+\ldots+2k-1+2(k+1)-1$, čo sa podľa indukčného predpokladu rovná $k^2+2(k+1)-1$. Pokračujeme v úpravách: $k^2+2k+1 = (k+1)^2$. Dostali sme sa k pravej strane dokazovanej rovnosti, tým pádom je dôkaz hotový.

Ako bolo vidno v predchádzajúcom príklade, pre úspešný dôkaz matematickou indukciou je kľúčové vhodne preformulovať tvrdenie $T(k+1)$ tak, aby sa odvolávalo na $T(k)$ (to sa nám podarilo prepísaním ľavej strany rovnosti). Následne využijeme indukčný predpoklad a dôkaz dovedieme do konca.

Pri dokazovaní sa občas stáva, že samotné tvrdenie nám k dôkazu nestačí, musíme ho teda „posilniť“ a dokázať túto silnejšiu variantu.

Příklad 2. Položme $s(n) = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$

Dokážte, že pre každé $n \geq 1$ platí $s(n) < 1$.

Řešení. Dokazované tvrdenie je síce pravdivé, ale príliš slabé - predpoklad $s(n) < 1$ nám nestačí na to, aby sme dokázali $s(n+1) = s(n) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} < 1$. Zvolíme preto silnejšiu variantu - pre každé $n \geq 1$ dokážeme $s(n) \leq 1 - \frac{1}{n+1}$. Keďže $1 - \frac{1}{n+1}$ je ostro menšie než 1, z posilneného tvrdenia nám okamžite vyplýva pôvodné.

Báza dôkazu je jednoduchá: $s(1) = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}$. Predpokladajme teraz $s(k) \leq 1 - \frac{1}{k+1}$ a prejdeme na indukčný krok: $s(k+1) = s(k) + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \leq 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 + \frac{1-(k+2)}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+2}$. Dokázali sme tak čo sme chceli.

Niekedy je užitočné rozšíriť aj bázu a krok samotnej indukcie. Môžeme napríklad dokazovať, že ak platí $T(k)$ a $T(k+1)$, platí aj $T(k+2)$. V takom prípade však v bázi musíme dokázať $T(k_0)$ aj $T(k_0+1)$. Ďalšou možnosťou je predpokladať pravdivosť T(j) pre všetky j, kde $k_0 \leq j \leq k$ a dokázať $T(k+1)$.

Příklad 3. Nech postupnosť f spĺňa $f(n+2) = 2f(n+1) - f(n)$ pre všetky $n \geq 0$ a zároveň platí $f(0) = 1$ a $f(1) = 2$. Potom $f(n) = n + 1$ pre všetky $n \geq 0$.

Řešení. V bázi tentokrát dokážeme $T(0)$ aj $T(1)$: $f(0) = 1 = 0 + 1$ a $f(1) = 2 = 1 + 1$. Ako indukčný predpoklad teda máme $f(k) = k + 1$ a $f(k+1) = k + 2$. Dokážeme tvrdenie pre $k+2$: $f(k+2) = 2f(k+1) - f(k) = 2(k+2) - (k+1) = k + 3$. Jednoduché, nie?

Nie vždy musí byť zo zadania na prvý pohľad jasné, že môžme využiť matematickú indukciu. Keď máme dokázať tvrdenie, ktoré platí pre nejakú množinu objektov, môžeme túto množinu rozdeliť podľa nejakého parametra, ktorý každý z objektov má a dá sa vyjadriť prirodzeným čislom. Následne použijeme matematickú indukciu - dokážeme platnosť tvrdenia pre objekty ktorých parameter sa rovná k_0 a podobne postupujeme v indukčnom kroku. Môžeme napríklad dokazovať nejakú vetu platnú pre všetky jednoduché grafy a ako parameter indukcie použijeme počet vrcholov či počet hrán v grafe. Príkladom dôkazu, v ktorom podobnú techniku používame a zároveň pracujeme s rozšírenou indukciou, je vzorové riešenie úlohy 2.3.

Na záver si pre výstrahu ukážeme príklad, ako sa možno pri matematickej indukcii ľahko popliesť.

Věta 4.1. *Pre ľubovoľnú neprázdnu konečnú podmnožinu množiny prirodzených čísel platí, že všetky jej prvky sú si navzájom rovné.*

Důkaz. Báza: Pre množinu obsahujúcu jeden prvok veta evidentne platí. Predpokladajme pravdivosť pre k-prvkové podmnožiny. Dokážeme výrok pre $(k+1)$-prvkovú podmnožinu $\{c_1, c_2, ..., c_{k+1}\}$. Uvážme dve k-prvkové množiny $\{c_1, c_2, ..., c_k\}$ a $\{c_2, ..., c_{k+1}\}$. Podľa indukčného predpokladu sú si prvky v jednej aj v druhej množinách rovné. Čísla $c_2, ..., c_k$ však patria obom množinám, preto si všetky čísla $c_1, c_2, ...c_{k+1}$ musia byť navzájom rovné, tvrdenie sme dokázali a uštedrili tak smrteľnú ranu modernej matematike.

Ako sa nám mohla podariť dokázať takáto haluz? Vidíte kde je podvod? (Rada: Skúste si prejsť indukčný krok pre $k = 1$). Prajeme Vám veľa šťastia a aby sa Vám pri riešení štvrtej série (ani nikdy potom) podobné pochybenia nestávali.

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů, která je součástí IPN Podpora technických a přírodovědných oborů (PTPO), reg.č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005. Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

`www.generaceY.cz`; `www.reformy-msmt.cz`

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

BRKOS Team 2012