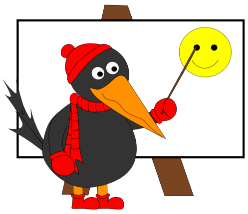
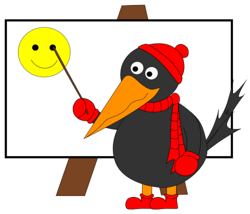


Pomocný text

POSLOUPNOSTI



Posloupnost se definuje jako zobrazení přirozených čísel, pro naše potřeby však bude stačit, když si posloupnost představíme jako množství nějakých čísel uspořádaných za sebe. Potom můžeme hovořit o prvním prvku posloupnosti, druhém, atd. Obecně budeme značit n-tý prvek posloupnosti jako a_n.

Posloupnost můžeme zadat různým způsobem. Nejjednodušší (avšak matematicky nesprávně) je výčet prvních několika prvků, ze kterého je zřejmé, jak posloupnost pokračuje. Například posloupnost $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots$

Další možností je tzv. explicitní vyjádření posloupnosti. V takovém případě zadáme n-tý prvek posloupnosti v závislosti na n. Například $a_n = n^2$ je explicitní vyjádření posloupnosti $1, 4, 9, 16, \ldots$

Poslední často používanou možností je rekurze. Zadáme n-tý člen posloupnosti v závislosti na několika předchozích členech. K tomu je potřeba zadat také prvních několik členů posloupnosti. Například $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+1}$, $a_1 = 1$ je rekurentní zápis posloupnosti $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$.

Posloupnosti mohou mít různé vlastnosti. My si uvedeme ty nejdůležitější z nich. Posloupnost je:

- *Rostoucí (klesající)*, pokud pro všechna n platí $a_n < a_{n+1} (a_n > an + 1)$.
- *Neklesající (nerostoucí)*, pokud pro všechna n platí $a_n \leq a_{n+1} (a_n \geq a_{n+1})$.
- *Monotónní*, pokud je neklesající nebo nerostoucí.
- *Ryze monotónní*, pokud je rostoucí nebo klesající.
- *Konstantní*, pokud pro všechna n platí $a_n = a_{n-1}$ (posloupnost je neklesající a zároveň nerostoucí).
- *Periodická*, pokud existuje k takové, že pro všechna n platí $a_n = a_{n+k}$ (nejmenší takové k se pak nazývá *periodou* posloupnosti).

Některé posloupnosti jsou pojmenovány, protože mají nějakou zajímavou vlastnost. My si několik takových posloupností ukážeme.

Aritmetická posloupnost

Jde o posloupnost, u které se nemění rozdíl dvou po sobě jdoucích členů. Je to tedy každá posloupnost splňující rekurentní zápis $a_{n+1} = a_n + d$. Pokud bychom tento vztah upravili dosazováním za a_i na pravé straně, dostaneme z něj explicitní zápis $a_{n+1} = a_1 + nd$. Konstanta d se nazývá diference aritmetické posloupnosti. Pokud je diference záporná, je posloupnost klesající, pro nulovou diferenci je konstantní a pro kladnou je rostoucí.

BRKOS Team 2012

Geometrická posloupnost

Je to posloupnost, u které se nemění podíl dvou po sobě jdoucích členů. Tento vztah se dá napsat rekurentním zápisem $a_n = qa_{n-1}$. Opět můžeme dosazovat do pravé strany a získáme explicitní vztah $a_n = a_1 q^{n-1}$. Zde se konstanta q nazývá kvocient geometrické posloupnosti. Pokud je kvocient kladný a menší než 1 je posloupnost klesající. Pokud je roven jedné, je posloupnost konstantní a pro kvocient větší než 1 bude posloupnost rostoucí.

Fibonacciho posloupnost

Je to známá posloupnost, jejíž každý prvek je součtem dvou předchozích. Je daná vztahem $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Tato posloupnost má řadu zajímavých vlastností. Například poměr $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ se blíží k číslu zvanému zlatý řez $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pomocí tohoto čísla se dá také zapsat explicitní vyjádření jako $a_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{(1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$.

O této posloupnosti by se dalo hovořit velice dlouho a možná se o ní objeví nějaká přednáška na soustředění, teď se však přesuneme dále.

Součty prvních $n+1$ prvků

U posloupností se často můžeme ptát, jaký je součet prvních několika prvků. My si teď pro výše zmíněné speciální posloupnosti tyto součty odvodíme.

Součet prvních $n+1$ členů *aritmetické* posloupnosti je

$$s_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + (a_1 + nd) = (n+1)a_1 + d(1 + 2 + \cdots + n).$$

Nyní tedy potřebujeme zjistit, čemu se rovná součet čísel od 1 do n. Z následujícího obrázku je vidět, že to bude $\frac{n(n+1)}{2}$.

$$\begin{array}{ccccc} & & n & & \\ \blacksquare & \blacksquare & \cdots & \blacksquare & \blacksquare \\ \bigcirc & \blacksquare & \cdots & \blacksquare & \blacksquare \\ \bigcirc & \bigcirc & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \blacksquare & \blacksquare \\ \bigcirc & \bigcirc & \cdots & \bigcirc & \blacksquare \\ \bigcirc & \bigcirc & \cdots & \bigcirc & \bigcirc \end{array} \quad n+1$$

Z toho tedy máme, že součet prvních $n+1$ členů posloupnosti je

$$s_{n+1} = (n+1)a_1 + d\frac{n(n+1)}{2} = (n+1)\frac{2a_1 + dn}{2}.$$

Nyní se podívejme, jak je to s *geometrickou* posloupností.

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n \\ q s_{n+1} &= a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n+1} \\ s_{n+1}(1-q) &= a_1 - a_1 q^{n+1} \\ s_{n+1} &= a_1 \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \end{aligned}$$

Pokud je kvocient geometrické posloupnosti v absolutní hodnotě menší než 1, má smysl se ptát také na součet všech členů posloupnosti:

$$
\begin{aligned}
s &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots \\
qs &= a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots \\
a_1 + qs &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots \\
a_1 + qs &= s \\
s &= \frac{a_1}{1-q}
\end{aligned}
$$

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů, která je součástí IPN Podpora technických a přírodovědných oborů (PTPO), reg.č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005. Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

`www.generaceY.cz`; `www.reformy-msmt.cz`

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

GENERACE
TECHNICKÉ A PŘÍRODOVĚDNÉ VZDĚLÁVÁNÍ
ZÁŽITEK S BONUSEM → KARIÉRY → PRESTIŽE → ZAJIŠTĚNÍ
www.generaceY.cz