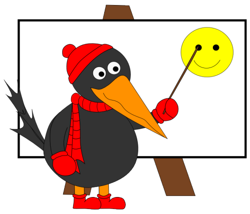
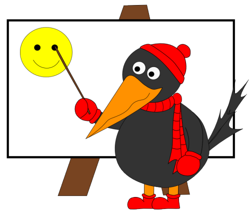


Pomocný text

Grafy

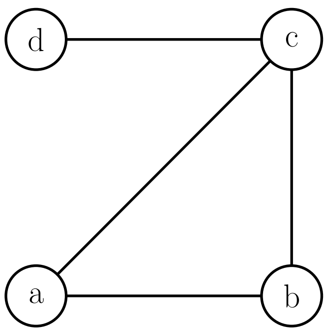


Teorie grafů je důležitou disciplínou moderní matematiky, která má široké využití v mnohých oblastech – pomocí grafů je možné nazírat na rozličné struktury, se kterými pracujeme v diskrétní matematice. Základním pojmem, se kterým se seznámíme, je *jednoduchý neorientovaný graf.*

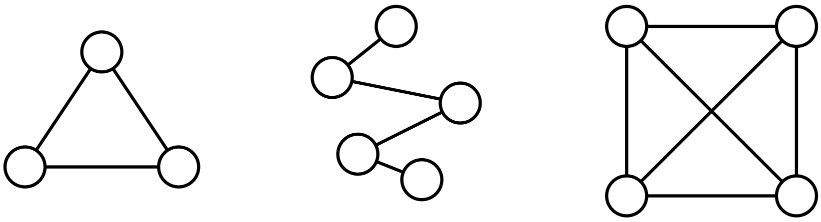
Graf je charakterizovaný dvěma množinami – množinou vrcholů (někdy též nazývaných uzlů) a množinou hran, přičemž hrana v grafu představuje spojnici dvou různých vrcholů. V tomto textu budeme hovořit pouze o neorientovaných grafech, kde na pořadí vrcholů spojených hranou nezáleží. Dodejme, že existují i grafy orientované a mnoho dalších různých druhů grafů, kterými se zde bohužel nemůžeme zabývat. Definujme si nyní graf formálně:

Definice 2.1. *Jednoduchý neorientovaný graf G je dvojice (V, H). kde V je množina vrcholů a H je množina hran – vybraných dvojprvkových podmnožin množiny vrcholů.*

Důležitá vlastnost grafů je, že se dají nakreslit. Vizuálně graf znázorňujeme tak, že vrcholy zakeslíme jako body a ty z nich, mezi kterými vede hrana, spojíme čárou. Ukažme si hned jeden příklad. Na následujícím obrázku vidíte graf, ve kterém $V = \{a, b, c, d\}$ a $H = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c, d\}\}$. Osm z osmi organizátorů Brkosu doporučuje grafy vždy hezky nakreslit. Mezi některé běžně používané grafy patří například *kružnice* délky n



(pro $n \geq 3$), která je tvořena n vrcholy spojenými n hranami do jednoho cyklu. Kružnici délky tři nazýváme též *trojúhelník. Cestou* délky n nazýváme graf, který obsahuje $n + 1$ vrcholů spojených za sebou n hranami. Zanedlouho si nadefinujeme ještě jeden obecnější pojem, a to *sled.* Konečně *úplný graf*, označovaný jako K_n, obsahuje n vrcholů a hranu mezi každou dvojicí vrcholů. Jako velmi jednoduché cvičení pro vás necháváme otázku, kolik hran tedy takový úplný graf na n vrcholech obsahuje? Intuitivně můžeme zavést pojem *podgraf* grafu G – ten vznikne tak, že vybereme určitou podmnožinu vrcholů grafu G a určitou podmnožinu hran, které tyto vrcholy spojují. Neformálně tedy můžeme říct,



Obr. 2.1: Trojúhelník, cesta, K_4

že z grafu prostě odstraníme některé vrcholy a některé hrany (rozumně, tak, aby hrany vedly mezi vrcholy – tedy při odstranění vrcholu musíme odstranit i všechny z něj vedoucí hrany). Samozřejmě můžeme odstranit i nulový počet vrcholů a hran, tedy graf je svým vlastním podgrafem. Dodejme, že pokud řekneme, že graf obsahuje kružnici nebo cestu, myslíme tím, že lze vybrat podgraf tohoto grafu tak, aby tento podgraf byl kružnicí nebo cestou. Bavme se nyní o stupních vrcholů. Uvedeme dvě definice a jednu supertriviální větu.

Definice 2.2. *Stupněm vrcholu a v grafu G nazýváme počet hran, které z tohoto vrcholu vycházejí a značíme jej* $d_G(a)$.

Definice 2.3. *Říkáme, že graf je k-regulární, pokud jsou všechny jeho vrcholy stupně k.*

Věta 2.1. *Součet stupňů všech vrcholů v libovolném grafu je sudý a je roven dvojnásobku počtu hran.*

K důkazu této věty si stačí uvědomit, že při sčítání stupňů vrcholů započítáme každou hranu dvakrát, neboť vede z nějakého vrcholu do jiného. Zobecněme nyní již zadefinovaný pojem cesty.

Definice 2.4. *Sled délky n v grafu G definujeme jako posloupnost* $v_0, h_1, v_1, h_2, v_2 ... h_n, v_n$, *kde* v_i *jsou vrcholy a* h_i *jsou hrany grafu G, přičemž platí, že hrana* h_i *spojuje vrcholy* v_{i-1} *a* v_i. *Pokud sled začíná a končí ve stejném vrcholu (tedy* $v_0 = v_n$*), nazýváme sled uzavřeným.*

Neformálně, sled je procházka grafem mezi dvěma vrcholy, přičemž pohybovat se smíme pouze po hranách. Vrcholy i hrany se mohou opakovat (srovnejte s cestou).

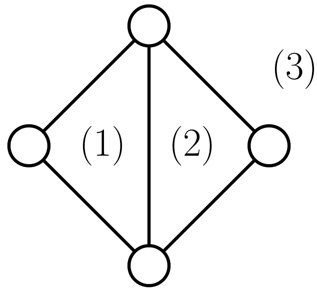
Definice 2.5. *Graf nazveme souvislým, pokud mezi libovolnými dvěma vrcholy existuje sled (tj. začíná v jednom a končí v druhém).*

Neformálně se na souvislost můžeme taky dívat tak, že při nakresleném grafu se dokážeme tužkou po hranách dostat z libovolného vrcholu do libovolného vrcholu. Zadefinujme si nyní důležitou třídu grafů, stromy.

Věta 2.2. *Souvislý graf s v vrcholy, který neobsahuje kružnici, má* $v - 1$ *hran. Takový graf nazýváme stromem.*

Tvrzení lehce dokážeme matematickou indukcí: Pokud má graf 1 vrchol, má zřejmě 0 hran. Pokud k souvislému grafu bez kružnic s k vrcholy přidáme jeden vrchol, pro zachování souvislosti musíme přidat alespoň jednu hranu. Současně musíme přidat nejvýše jednu hranu, jinak bychom vytvořili kružnici (proč?). S každým vrcholem tedy přidáváme právě jednu hranu a důkaz je u konce. Dodejme, že důkazy indukcí jsou v teorii grafů velmi obvyklé a jistě se vám tato technika může hodit i v této sérii. Další zajímavou charakteristikou grafů, kterou se zaobíráme při jejich kreslení, je možnost nakreslit graf tak, aby se žádné hrany nekřížily. Neformálně můžeme říct, že grafy, které lze takto nakreslit, nazýváme *rovinné*. Dodejme, že tato podmínka nemusí platit pro libovolné nakreslení grafu, ale musí existovat alespoň jedno, kde se hrany nekříží. Rovinné grafy lze pochopitelně zadefinovat i rigorózně, zájemce odkazujeme na *Kuratowského větu.*

Definice 2.6. *Stěna nakreslení rovinného grafu je souvislá oblast roviny ohraničená hranami tohoto nakreslení.*



Rovinný graf na obrázku má tři stěny. Příkladem grafu, který rovinný není, je úplný graf na pěti vrcholech K_5. Uveďme si nyní důležitou formulku, se kterou u rovinných grafů často pracujeme, Eulerův vztah:

Věta 2.3. *Nechť G je souvislý graf s aspoň jedním vrcholem. Nechť dále čísla v, h, s označují po řadě počet jeho vrcholů, hran a stěn. Potom platí:*

$$v + s - h = 2$$

Důkaz můžeme opět provést matematickou indukcí (zde vzhledem k počtu kružnic v grafu) a přenecháváme jej jako cvičení. Poslední otázkou, které se budeme věnovat, je obarvení grafu.

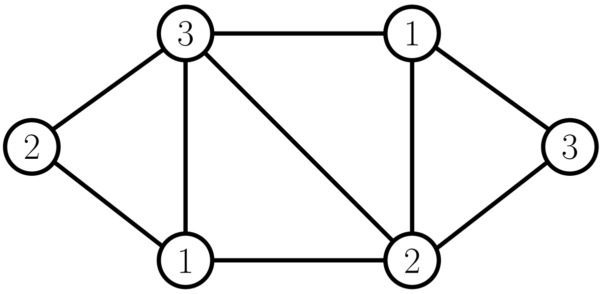
Definice 2.7. *Vrcholovým obarvením grafu nazveme přiřazení jedné barvy každému vrcholu, přičemž platí, že dva vrcholy spojené hranou musí mít různé barvy. Graf je k-vrcholově-obarvitelný, pokud existuje takové obarvení, které používá nanejvýše k různých barev.*

Definice 2.8. *Hranovým obarvením grafu nazveme přiřazení jedné barvy každé hraně, přičemž platí, že dvě hrany vycházející ze stejného vrcholu musí mít různé barvy. Graf je k-hranově-obarvitelný, pokud existuje takové obarvení, které používá nanejvýše k různých barev.*

Na obrázku vidíme obarvení (barvy jsou vyjádřené číslicemi) 3-vrcholově-obarvitelného grafu. Okamžitě je vidět, že méně barev by nám nestačilo. Náš stručný úvod uzavřeme jednou slavnou větou z teorie grafů.

Věta 2.4. *Každý rovinný graf je 4-vrcholově-obarvitelný.*

Důkaz je příliš složitý, abychom jej zde uvedli. Poznamenejme však, že tato věta byla dlouho noční můrou matematiků a dokázat se ji podařilo až po několika desetiletích. Současně ale nesmírně pomohla k rozvoji teorie grafů, neboť matematici často kvůli důkazu



tvořili nové metody a konstrukce, které sice k dokázání této věty nepomohly, ale jinak se ukázaly jako užitečné a používají se dodnes. Shrňme nyní, co jsme se dnes naučili: Začali jsme jednoduchými definicemi grafu, podgrafu, cesty, kružnice, sledu a úplného grafu. Byla řeč o stupních vrcholů a regularitě grafu. Zjistili jsme, co je v teorii grafů souvislost, co jsou to stromy a jak mocná je indukce. Nakonec jsme jako samostatné celky probrali rovinné grafy a obarvení grafů. Teorie grafů je velmi rozsáhlá a dalo by se pokračovat mnoha směry – orientovanými grafy, multigrafy, průnikovými grafy, algoritmickými problémy spojenými s grafy, složitostí a mnoha dalšími. Věříme, že uvedený základní přehled jednoduchých grafů vám bude nápomocný při řešení úloh druhé série. Pokud vás teorie grafů zaujala, budeme nadšeni, pokud se jí budete věnovat i nadále. Pokud v budoucnosti uvažujete o studiu matematiky nebo informatiky, jen těžko se s teorií grafů nepotkáte.

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů, která je součástí IPN Podpora technických a přírodovědných oborů (PTPO), reg.č. CZ.1.07/4.2.00/06.005. Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

`www.generaceY.cz`; `www.reformy-msmt.cz`

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ