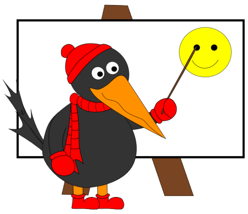
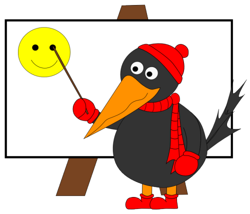


Pomocný text

VEKTORY



V našom pomocnom texte Vás prevedieme postupne afínnou geometriou, skalárnym súčinom dvoch vektorov, vektorovým súčinom a zmienime sa krátko o orientovanom obsahu a jeho využití. Tento text sa snaží zaviesť vektory pomocou intuitívnych geometrických predstáv a využiť tieto poznatky na riešenie najmä geometrických úloh, samozrejme existuje mnoho prístupov ako zaviesť vektory a s nimi súvisiace pojmy (veľkosť vektoru, súradnicový systém...), ale mnoho ráz si to aj vyžaduje značný teoretický základ. Tak hor sa do čítania!

Afínna geometria

Na úvod si rozoberieme vzájomnú korešpondenciu medzi vektormi[1] a bodmi[2] ľubovoľného euklidovského priestoru s pevne zvoleným bodom $\mathbf{0}$ – počiatkom. Keďže v minulej sérii ste sa zaoberali číselnými množinami a definovali ste si na nich binárne operácie, čiže zobrazenia, ani pri vektoroch neupustíme od tejto tradície. Definujeme zobrazenie V (translácia či posunutie alebo vektor) určené dvomi bodmi A a jeho obrazom $V(A) = B$. Pre jednoduchosť budeme značiť posunutie nejakého bodu A do B nasledovne $\overrightarrow{AB}$. Ak by sme bod A určili konkrétnejšie, čiže počiatkom $\mathbf{0}$ a jeho obrazom $V(\mathbf{0}) = X$, nie je pochýb, že daný vektor $\overrightarrow{\mathbf{0}X}$ určuje bod X jednoznačne. Preto nebudeme rozlišovať medzi vektorom $\overrightarrow{\mathbf{0}X}$ a bodom X. V nasledujúcich úvahách zavedieme konvenciu, že v prípade popisu geometrického útvaru v príkladoch jeho vrcholy budeme značiť ako body a zase na druhej strane v teoretických častiach budeme používať značenie ako vektory ľubovoľného euklidovského priestoru $\mathbb{E}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Definice 6.1. *Nech A, B sú ľubovoľné body euklidovského priestoru a $t \in \mathbb{R}^+$ ľubovoľné. Definujeme súčet bodov A, B nasledovne*

$$A + B = \textit{stredovej súmernosti (reflexii) počiatku } \mathbf{0} \textit{ podľa stredu úsečky } \overline{AB}$$

a bod tX je taký bod priestoru, že pre neho platí:

- *jeho vzdialenosť od počiatku $\mathbf{0}$ je t-krát väčšia ako vzdialenosť X od $\mathbf{0}$.*
- *leží na polpriamke z bodu $\mathbf{0}$ prechádzajúcej bodom X.*

[1] značíme malými písmenami najčastejšie $u, v, w \ldots$
[2] „klasické“ značenie pre body $A, B, C, D \ldots$

Pre $s \in \mathbb{R}^-$ platí, že bod sX vznikne stredovou súmernosťou podľa počiatku $\mathbf{0}$ bodu $(-s)X = -sX$. Ďalej definujeme $0X = \mathbf{0}$.

$$\overrightarrow{AB} = B + (-A) = B - A$$

Ťažisko trojuholníka je bod, ktorý delí úsečku určenú ľubovoľným vrcholom a stredom protiľahlej strany v pomere 2:1.

Príklad 6.1. Dokážte, že ťažisko trojuholníka ABC je bod $T = \frac{A+B+C}{3}$.

Príklad 6.2. Nech $ABCD$ je štvoruholník a $A'B'C'D'$ štvoruholník ťažísk trojuholníkov postupne BCD,CDA,DAB a ABC. Ukážte, že existuje stred rovnoľahlosti Y, z ktorého môže byť štvoruholník $ABCD$ transformovaný na štvoruholník $A'B'C'D'$. Určte Y a koeficient rovnoľahlosti.

Riešenie. Najskôr určíme koeficient rovnoľahlosti:

$$\overrightarrow{A'B'} = \frac{C+D+A}{3} - \frac{B+C+D}{3} = \frac{-(B-A)}{3} = -\frac{\overrightarrow{AB}}{3}$$

Analogicky pre zvyšné tri úsečky, odkiaľ získame všeobecný predpis pre rovnoľahlosť T a ľubovoľné vrcholy $A'B'C'D'$ resp. $ABCD$: $T\left(\overrightarrow{K'L'}\right) = -\frac{\overrightarrow{KL}}{3}$ a podľa definície vieme, že pre stred rovnoľahlosti Y platí

$$T\left(\overrightarrow{YL'}\right) = -\frac{\overrightarrow{YL}}{3}.$$

Určíme Y pomocou vrcholu A':

$$A' - Y = -\frac{A-Y}{3} \Leftrightarrow Y = \frac{A+B+C+D}{4}.$$

Pre ostatné vrcholy sa ekvivalencia overí ľahko, keďže ostatné rovnosti sú analogické.

Skalárny súčin

V nasledujúcej časti budeme pre naše úvahy potrebovať pojem súradníc vektoru, preto ho nasledovne intuitívne zavedieme. Budeme ich určovať vzhľadom k pravouhlej sústave súradnic priestoru $\mathbb{E}^n$ s pevne určenou orientáciou osí. Potom súradnice počiatku $\mathbf{0}$ v tejto sústave sú $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, ktorý niekedy nazývame *nulový vektor*.

Definice 6.2. *Nech $u, v \in \mathbb{E}^n$ so súradnicami $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Definujeme* skalárny súčin *vektorov u, v nasledovne*

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Věta 6.1. *Takto definované zobrazenie má nasledujúce vlastnosti:*

- $\forall u \in \mathbb{E}^n : \langle u, u\rangle \geq 0, \langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = \mathbf{0}$
- $\forall u, v \in \mathbb{E}^n : \langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
- $\forall u, v, w \in \mathbb{E}^n; a, b \in \mathbb{R} : \langle u, av + bw\rangle = a\langle u, v\rangle + b\langle u, w\rangle$

Definice 6.3. Normu *(veľkosť) vektoru* $u \in \mathbb{E}^n$ *definujme*

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

V nasledujúcom príklade načrtneme geometrický význam takto definovaného zobrazenia.

Príklad 6.3. Uvážme trojuholník so stranami $\|u\|, \|v\|, \|u - v\|$ tak, že $\mathbf{0}, u, v, \in \mathbb{E}^3$ sú jeho vrcholy [3]. Určíme

$$\|u - v\|^2 = \sum_{i=1}^{3}(u_i - v_i)^2 = \sum_{i=1}^{3} u_i^2 + \sum_{i=1}^{3} v_i^2 - 2\sum_{i=1}^{3} u_i v_i = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle.$$

Použitím *kosínusovej vety* pre tento trojuholník máme:

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| \cos \alpha,$$

kde α je uhol medzi vektormi u a v. Čím získavame geometrický význam skalárneho súčinu.

Definice 6.4. *Nech* $u, v \in \mathbb{E}^n - \{\mathbf{0}\}, n \in \mathbb{N}$. *Odchýlkou vektorov* u, v *nazveme reálne číslo* $\alpha \in [0, \pi]$, *pre ktoré platí*

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}.$$

Aby sme overili, že predchádzajúca definícia je korektná, uvedieme nasledujúci príklad:

Príklad 6.4. Pre ľubovolné $u, v \in \mathbb{E}^n$ dokážte, že platí Cauchy–Schwarzova nerovnosť

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

Rovnosť nastane práve vtedy, keď u, v sú lineárne závislé[4] alebo aspoň jeden z dvojice u, v je nulový vektor.

Riešenie. Najprv položme $u = \mathbf{0}$, potom $\langle \mathbf{0}, v\rangle = 0 = \|\mathbf{0}\|\|v\|$. Analogicky pre $v = \mathbf{0}$. Pre $u, v \neq \mathbf{0}, t \in \mathbb{R}$ počítajme:

$$0 \leq \|u - tv\| = \langle u - tv, u - tv\rangle = \langle u, u\rangle - 2t\langle u, v\rangle + t^2\langle v, v\rangle = g(t)$$

Aby pre danú kvadratickú rovnicu $g(t)$ platila uvedená nerovnosť, musí byť diskriminant

$$4\langle u, v\rangle^2 - 4\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle \leq 0.$$

Čo je ekvivalentné s vyššie uvedenou *Cauchy–Schwarzovou* nerovnosťou, rovnosť podľa *vety 6.2* nastane práve vtedy, keď $u - tv = \mathbf{0}$.

Věta 6.2. *Nech* $u, v \in \mathbb{E}^n$ *sú nenulové vektory. Platí* $u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0$ *a* $u \parallel v \Leftrightarrow \sphericalangle u, v = \pi$.

Definice 6.5. *Vzdialenosť dvoch vektorov* $u, v \in \mathbb{E}^n, n \in \mathbb{N}$ *definujeme ako*

$$\rho(u, v) = \|u - v\|.$$

[3] presvedčte sa, že skutočne ide o trojuholník

[4] definujeme: $\exists t \in \mathbb{R} : u - tv = \mathbf{0}$

Poznámka 6.1. Čitateľ sa môže ľahko presvedčiť, že ide o dobre definovanú vzdialenosť dvoch vektorov. Takto definovaná vzdialenosť spĺňa všetky geometrické požiadavky tj. pre ľubovoľné $u, v, w \in \mathbb{E}^n, n \in \mathbb{N}$:

- $\rho(u, v) = \rho(v, u)$
- $\rho(u, v) \geq 0,\ \rho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
- $\rho(u, v) \leq \rho(v, u) + \rho(u, w)$ ide o tzv. *trojuholníkovú nerovnosť*[5].

Príklad 6.5. Nech $A, B, C, D \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ ľubovoľné. Dokážte, že platí

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2 = 2\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB} \rangle.$$

Riešenie. Budeme ľavú stranu rovnosti upravovať ekvivalentnými úpravami:
$\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2 = 2\left(\langle B, C\rangle + \langle D, A\rangle - \langle B, A\rangle - \langle D, C\rangle\right) =$
$= 2(\langle B, C - A\rangle - \langle D, C - A\rangle) = 2\langle B - D, C - A\rangle = 2\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}\rangle.$

Keďže body v predchádzajucom príklade boli ľubovolné mohli určovať ľubovolný útvar priestoru, preto uvedieme pár možností[6]:

- v štvorstene $ABCD$ je $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{AD}\|^2$
- v lichobežníku $ACBD$[7]je $\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{AD}\|^2 + 2\|\overrightarrow{AC}\|\|\overrightarrow{DB}\|$
- v rovnobežníku $ACBD$ je $\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}\|^2 = 2(\|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{CB}\|^2)$
- v trojuholníku ABC pre ťažnicu t_a platí $\|\overrightarrow{BC}\|^2 + 4t_a^2 = 2(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{CA}\|^2)$, pretože zostrojíme rovnobežník $ABDC$, kde D vznikne reflexiou bodu A podľa stredu $\overline{BC}$; podobné úvahy platia aj pre ostatné ťažnice
- v trojuholníku ABC[8]. s ťažiskom S platí $\overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{BS} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 5\|\overrightarrow{AB}\|^2$.

Vektorový súčin

Definice 6.6. *Nech $u, v \in \mathbb{E}^3$ a $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$. Vektorový súčin u, v definujeme nasledovne*

$$u \times v = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} (1, 0, 0) + \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} (0, 1, 0) + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} (0, 0, 1),$$

kde $\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = eh - gf$ je determinant reálnej matice 2×2 definovaný uvedeným vzťahom.

Neformálne povedané vektorovým súčinom dvoch lineárne nezávislých vektorov je taký vektor,ktorý je kolmý na oba. Jeho smer určujeme pomocou pravidla pravej ruky.

[5]pri dôkaze sa využije vyššie dokazaná nerovnosť
[6]nakreslite si obrázky
[7]využitím Cauchy–Schwarzovej nerovnosti, pretože $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}$ sú lineárne závislé(rovnobežné)
[8]použite rovnosť z predchádzajúceho príkladu na štvoruholník $ABS_{\overline{BC}}S_{\overline{AC}}$

Věta 6.3. *Nech $u, v \in \mathbb{E}^3$, potom platí*

$$\|u \times v\| = \|u\|\|v\| \sin \alpha,$$

kde $\alpha \in (-\pi, \pi]$ je orientovaný uhol od u k v, značíme (u, v).

Poznámka 6.2. Načrtneme dôkaz predchádzajúcej vety. Podobne ako v sekcii o skalárnom súčine počítajme (v druhom kroku použijeme *Lagrangeovu identitu*[9])
$\|u \times v\|^2 = (u_2v_3 - v_2u_3)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2 =$
$= \|u\|^2\|v\|^2(1 - \cos^2 \alpha) = \|u\|^2\|v\|^2 \sin^2 \alpha, \alpha \in [0, \pi]$.

Z predchádzajúcej vety vidíme, že veľkosť vektora $u \times v$ je rovná orientovanej ploche rovnobežníka určeného lineárne nezávislými vektormi u, v.

[9] `http://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange's_identity`, ale ide to aj cez roznásobenie :)