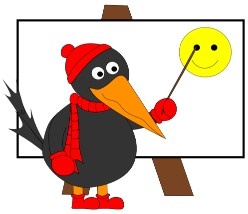
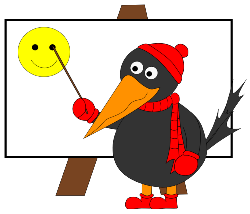


Pomocný text

ČÍSELNÉ OBORY



Číselné obory

Kde by bola matematika bez čísel? Čísla predstavujú jednu z prvých abstrakcií, ktorú ľudia začali vnímať. Abstrakcia spočívala v tom, že množstvo, ktoré sa snažili popísať, nebolo nijak závislé na počítanej veci. Predkami čísel boli vyjadrenia typu „mnoho“ alebo „málo“. S postupom času sa však podobné miery množstva dali využívať len ťažko a na scénu nastúpil postupný rozvoj algebry. S ním sa zjednodušil obchod, vylepšilo sa plánovanie úrody a uľahčilo sa plánovanie výroby a stavby. Poďme sa teraz bližšie pozrieť na to, čo sa v priebehu času vyvinulo.

Číselné obory sú množiny prvkov, ktoré nazývame čísla, a s ktorými môžeme dobre manipulovať – zavádzať na nich zmysluplné operácie – plus $\oplus$ a krát $\otimes$ a operácie k nim inverzné.
Vymenujme si základné známe množiny:

- $\mathbb{N}$ (množina prirodzených čísel) – množina obsahujúca 1 a uzavretá na operácie $\oplus$ a $\otimes$ (čím chceme povedať, že ak zoberieme dva prvky množiny a použijeme na nich operáciu $\oplus$, výsledok nájdeme v množine tiež).
- $\mathbb{Z}$ (množina celých čísel) – množina, ktorá vznikne uzavretím $\mathbb{N}$ na inverznú operáciu k operácií $\oplus$, čiže mínus. Uzavretá aj na operáciu $\otimes$.
- $\mathbb{Q}$ (množina racionálnych čísel) – množina vzniknutá uzavretím $\mathbb{Z}$ na operáciu inverznú k $\otimes$, čiže na delenie. Inak povedané, množina všetkých podielov celých čísel.
- $\mathbb{I}$ (množina iracionálnych čísel) – množina vzniknutá tzv. Dedekindovým rezom. Dá sa dokázať, že čísla ako $\sqrt{2}$ nepatria do nijakej z predchádzajúcich množín, a preto je táto množina neprázdna, čiže medzi racionálnymi číslami naozaj niečo je.
- $\mathbb{R}$ (množina reálnych čísel) – množina vzniknutá zjednotením predchádzajúcich dvoch.
- $\mathbb{C}$ (množina komplexných čísel) – množina reálnych čísel rozšírená o riešenia reálnych polynómov.

Takýchto a podobných množín sa dá skonštruovať naozaj veľa. Ďalším príkladom môže byť množina $P = \{0, 1, 2\}$, na ktorej sú definované operácie $a \oplus b = a + b \pmod 3$ a $a \otimes b = a \cdot b \pmod 3$ $\forall a, b \in P$. Táto množina je na tieto operácie uzavretá.

BRKOS Team 2012

Pri definícii týchto oborov sme sa dotkli aj vzťahov medzi nimi. Poďme sa teda bližšie pozrieť na vlastnosti, ktoré obory spájajú a ktoré ich rozdeľujú.

Kardinálne číslo

Veľkosť množiny (počet prvkov patriacich množine) je základom pri budovaní prirodzených čísel z teórie množín. Napr. množina {Henry, Matěj, {Liběnka, Kouma, Ňouma}} je trojprvková množina. Keď sa však opýtame, koľko je prirodzených čísel, odpoveď je nekonečne veľa.

Otázka potom znie, koľko je reálnych čísel, ktorých je úplne intuitívne oveľa viac. Na toto dáva odpoveď mohutnosť množiny.

Definícia 5.1. *Množiny A, B majú rovnakú mohutnosť práve vtedy, keď existuje zobrazenie $f\colon A \to B$ také, že*

a) je injektívne, tj. každý vzor má iný (vlastný,špecifický) obraz

$$\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

b) je surjektívne, tj. každý obraz má vzor.

$$\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$$

Vďaka tejto definícii môžeme množinám určovať ich mohutnosť, a to kardinálnym číslom.

Definícia 5.2. *Množiny s mohutnosťou rovnakou ako prirodzené čísla majú kardinálne číslo rovné* $\aleph_0$ (aleph 0). *Množiny s takouto mohutnosťou, prípadne mohutnosťou konečnou, nazývame spočetnými.*

Príklad 5.1. Dokážte, že množina celých čísel je spočetná.

Riešenie. Príkladom bijektívneho zobrazenia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ je nasledovné:$f(x) = (-1)^n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Toto zobrazenie je naozaj bijektívne, čo sa dá ukázať aj nájdením inverzného zobrazenia $f^{-1}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f^{-1}(x) = 2|n| + \frac{1}{2}|\mathrm{sgn}(n)|(1 - \mathrm{sgn}(n))$, kde pod signum máme na mysli funkciu:

$$\mathrm{sgn}(n) = \begin{cases} \frac{n}{|n|} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

Keď si rozpíšete zopár čísel, uvidíte, že takto zložito definované funkcie sú naozaj inverzné.

Príklad 5.2. Dokážte, že množina reálnych čísel je nespočetná.

Riešenie. Toto tvrdie sa dá dokázať Cantorovou diagonálnou metódou, dokonca pri menšej množine: intervale $\langle 0, 1 \rangle$. Táto metóda vraví, že po ľubovoľnom počte zobrazených prvkov vieme nájsť reálne číslo také, že ho ešte nemáme zobrazené. Stačí si už zobrazené reálne čísla napísať pod seba a z každého vybrať jedno číslo na inom desatinnom mieste. Potom si vymyslíme také číslo, aby sa s každým už zobrazeným nezhodovalo aspoň v jednom desatinnom mieste. Stačí keď sa obmedzíme na čísla obsahujúce 0 a 1 a máme tabuľku 5.1. Z tabuľky 5.1 vidieť, že číslo $0,10011$ ešte nebolo zobrazené. Ak teda vieme vždy nájsť obraz, ktorý ešte nemá vzor aj po nekonečnom množstve predchádzajúcich obrazov, tak zobrazenie nie je surjektívne a množina reálnych čísel je nespočetná.

	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
F(1)	**0**	1	0	1	1
F(2)	1	**1**	0	1	0
F(3)	0	1	**1**	1	0
F(4)	0	1	1	**0**	1
F(5)	1	0	1	0	**0**

Tab. 5.1: Cantorova diagonálna metóda

Definícia 5.3. *Množiny s mohutnosťou rovnakou ako reálne čísla majú kardinálne číslo* $\aleph_1$ (aleph 1)*, kde* $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$*, resp. tieto množiny nazývame množinami sa kardinalitou kontinua.*

Veta 5.1. *Nech* $\aleph_0$ *je kardinalita prirodzených,* $\aleph_1$ *kardinalita reálnych čísel. Potom platia vzťahy:*

1) $\mathrm{r}\aleph_0 = \aleph_0$ *pre* $\mathrm{r} \in \mathbb{R} - \{0\}$ *(podobne pre* $\aleph_1$*)*

2) $\aleph_0^{\mathrm{r}} = \aleph_0$ *pre* $\mathrm{r} \in \mathbb{R}^+$ *(podobne pre* $\aleph_1$*)*

3) $\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1$

Príklad 5.3. Dokážte, že $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ množina všetkých podmnožín prirodzených čísel má kardinalitu $\aleph_1$.

Riešenie. Skonštruujeme zobrazenie $\mathrm{F_A} : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ také, že prirodzenému číslu priradí 1, ak patrí do množiny A a 0, ak do nej nepatrí. Potom každá podmnožina množiny $\mathbb{N}$ je popísaná práve jedným takýmto zobrazením, napr. množina $B = \{1, 2, 3\}$ je popísaná

$$\mathrm{F_B} = \begin{cases} 1 & x = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Každé takéto zobrazenie zároveň popisuje práve jednu podmnožinu množiny $\mathbb{N}$. To znamená, že medzi množinou $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a množinou $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ všetkých zobrazení z $\mathbb{N}$ do $\{0, 1\}$ je bijekcia, čiže majú rovnakú mohutnosť. Automaticky však diagonalizáciou ukážeme (podobne ako v tabuľke), že keď sa budeme snažiť o bijektívne zobrazenie z $\mathbb{N}$ do $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, tak zlyháme, keďže budeme vedieť nájsť také zobrazenie, ktoré ešte nebolo zobrazené. Preto je kardinalita týchto čísel $\aleph_1$.

Príklad 5.4. Dokážte, že množina konečných podmnožín prirodzených čísel má kardinalitu $\aleph_0$.

Riešenie. Je triviálne ukázať, že množina jednoprvkových podmnožín prirodzených čísel je spočetná. Ukážeme, že podobné tvrdenie platí pre dvojprvkové množiny. Stačí nám vytvoriť si tabuľku 5.2. Pri tomto zobrazení z $\mathbb{N}$ do množiny dvojprvkových podmnožín $\mathbb{N}$ sme si vytvorili sieť, ktorá priraďuje po diagonálach prirodzeným číslam dvojprvkové podmnožiny. Keďže v tejto sieti sú všetky dvojprvkové podmnožiny $\mathbb{N}$, každá dostane priradený vzor, každý vzor má obraz, tak sme našli bijekciu.
Podobne sa dá postupovať aj vo viacrozmerných prípadoch napr. pri štvorprvkových podmnožinách $\{a, b, c, d\}$ najprv očíslujeme tie podmnožiny, pre ktoré $a+b+c+d \leq 10$, ktorá je jediná ($\{1, 2, 3, 4\}$), potom tie, čo majú súčet menší ako 14 atď...

	1	2	3	4	5
1		$1 \to \{1,2\}$	$2 \to \{1,3\}$	$3 \to \{1,4\}$	$5 \to \{1,5\}$
2			$4 \to \{2,3\}$	$6 \to \{2,4\}$	$7 \to \{2,5\}$
3				$8 \to \{3,4\}$	$9 \to \{3,5\}$
4					$10 \to \{4,5\}$
5					

Tab. 5.2: Sieť

Keďže všetky konečné podmnožiny sú spočetné, môžeme skonštruovať nasledujúcu tabuľku 5.3, kde budeme mať čísla zoradené v riadkoch podľa počtu prvkov v množine, kým v stĺpcoch podľa vzoru, ktorý množina dostala pri dokazovaní, že spolu s ďalšími v stĺpci tvorí spočetnú množinu.Keďže sme znova vytvorili bijekciu, táto množina je naozaj spočetná.

	1	2	3	4	5
1	$1 \to \{1\}$	$2 \to \{1,2\}$	$4 \to \{1,2,3\}$	$7 \to \{1,2,3,4\}$	$11 \to \{1,2,3,4,5\}$
2	$3 \to \{2\}$	$5 \to \{1,3\}$	$8 \to \{1,2,4\}$	$12 \to \{1,2,3,5\}$	$16 \to \{1,2,3,4,6\}$
3	$6 \to \{3\}$	$9 \to \{1,4\}$	$13 \to \{1,3,4\}$	$17 \to \{1,2,3,6\}$	$20 \to \{1,2,3,4,7\}$
4	$10 \to \{4\}$	$14 \to \{2,3\}$	$18 \to \{1,2,6\}$	$21 \to \{1,2,4,5\}$	$23 \to \{1,2,3,5,6\}$
5	$15 \to \{5\}$	$19 \to \{1,5\}$	$22 \to \{1,3,5\}$	$24 \to \{1,2,3,7\}$	$25 \to \{1,2,3,4,8\}$

Tab. 5.3: Konštrukcia bijekcie

Definícia 5.4. *Množiny s mohutnosťou rovnakou ako reálne čísla majú kardinálne číslo* $\aleph_1$ (aleph 1), *kde* $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ *, resp. tieto množiny nazývame množinami sa kardinalitou kontinua.*

Hustota množiny

Ďalšou vlastnosťou číselných množín je hustota. Intuitívne to znamená asi toľko, že množina, ktorá je hustá, má tak veľa prvkov, že akokoľvek veľkú lupu si na ňu zoberieme, nenájdeme v nej žiadnu medzeru (i keď tam možno je). Ešte inak, medzi ľubovoľnými dvoma prvkami si nájdeme aspoň jeden ďalší.

Definícia 5.5. *Množina A je hustá v B práve vtedy, keď ku každému $\varepsilon > 0$ a ku každému $b \in B$ existuje $a \in A$ také, že vzdialenosť $\rho(a,b) = |a-b| = 0$.*

Táto definícia sa dá dobre uplatniť napr. na racionálne čísla. Každé reálne číslo vieme ľubovoľne presne aproximovať (približne vyjadriť) týmito číslami, preto sú racionálne čísla husté. Robíme to vždy, keď sa pozeráme na výsledok na kalkulačke. Tá nám vždy zaokrúhli výsledok na nejaký počet číslic. Keďže sa pozeráme na konečný počet čísel, dá sa výsledok zapísať v tvare zlomku. Pridaním ďalšej číslice sa nám vzdialenosť zaokrúhlenia oproti skutočnému výsledku zmenší, až sa postupne blíži k nule.

Všimnime si ešte ďalšieho zaujímavého faktu. Dá sa dokázať, že množina racionálnych čísel je spočetná. Teraz sme si ukázali, že je aj hustá v reálnych číslach, ktoré sú však nespočetné. To znamená, že husté množiny môžu byť aj tie, ktoré majú veľmi málo prvkov.

Transcendencia čísel

Definícia 5.6. *Číslo a nazveme algebraické, ak existuje polynóm $p(x)$ s celočíselnými koef1icientmi taký, že $p(a) = 0$. Inak nazveme toto číslo transcendentné.*

Je triviálne dokázať, že racionálne čísla sú algebraické. Pre iracionálne čísla však nič také neplatí, keďže existujú príklady, kde číslo je algebraické (napr. $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$, ktorý je koreňom $p(x) = x^9 - 9x^6 + 27x^3 - 30$), ale aj príklady, kedy je číslo transcendentné (π,e). Uveďme si teraz vetu, ktorá nám transcendenciu umožní ľahšie rozpoznať.

Veta 5.2. *Nech a, b sú algebraické, $a \neq 0, 1$, b je iracionálne. Potom je a^b transcendentné.*

Príklad 5.5. Dokážte, že $\log_3 4$ je transcendentné.

Riešenie. Najprv si ukážeme, že $\log_3 4$ je iracionálne. Pre spor predpokladajme, že je tomu naopak, a existujú $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ také, že $\log_3 4 = \frac{m}{n}$. Potom platí: $4 = 3^{\frac{m}{n}}$, z čoho $4^n = 3^m$. Keď použijeme na túto rovnicu mod 2, dostaneme $0 = 1$, čo je očividne spor. Preto je $\log_3 4$ iracionálne.
Teraz predpokladajme pre spor, že je algebraické. Potom ale platí: $3^{\log_3 4} = 4$. No ale keďže 3 aj $\log_3 4$ sú algebraické, $\log_3 4$ je iracionálne, potom je $3^{\log_3 4} = 4$ transcendentné. To je ale spor, keďže 4 je koreňom $x - 4 = 0$. Preto je $\log_3 4$ transcendentné.