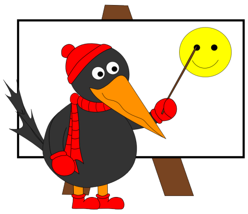
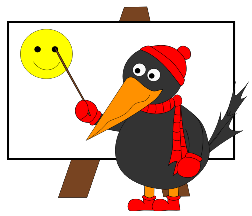


Pomocný text

Pravděpodobnost



4.1 Pravděpodobnost

O pravděpodobnosti jste již každý určitě něco slyšeli, ale než se pustíme do podrobného základu s definicemi, řekneme si intuitivně, co to znamená. Pravděpodobnost je nějaké číslo z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, které nám říká, jaká je šance, že se něco stane. Většinou se pravděpodobnost udává v procentech, což z tohoto čísla získáme tak, že jej vynásobíme stem.

K počítání pravděpodobností je však dobré znát základ kombinatoriky. Pojďme si tedy ukázat trochu kombinatoriky.

Začněme jednoduchým příkladem.

Příklad 4.1. Kolik existuje trojciferných přirozených čísel?

Řešení. Rozmysleme si nejprve, jaké číslice mohou být na první pozici v našem čísle. Může to být libovolná číslice od 1 do 9. To znamená, že na první pozici můžeme vybrat z 9 možností. Co může být na druhé pozici? Všimněme si, že na této pozici už můžeme použít i nulu, kterou jsme předtím nemohli. Máme tedy celkem 10 možností. Na třetí pozici máme zase 10 možností, co použít, protože i zde může být nula. Nyní nám stačí tyto čísla vynásobit, abychom získali počet všech možností (tomu se učeně říká pravidlo součinu). Výsledek je tedy $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ trojciferných čísel.

Tohle pro vás snad nebylo těžké, tak se podívejme ještě na jeden.

Příklad 4.2. Kolik je dohromady dvojciferných a trojciferných čísel?

Řešení. Dle stejné úvahy jako v předchozím příkladě je počet dvojciferných čísel $9 \cdot 10$ a trojciferných, jak už bylo vypočítáno 900, takže dohromady to dělá $9 \cdot 10 + 900 = 990$ čísel (tomu se zase učeně říká pravidlo součtu).

Tímto úvod do kombinatoriky ukončíme, protože s pomocí pravidla součtu a součinu si vystačíte. Kdo se bude chtít kombinatorikou dále zabývat, jistě si na internetu nějaké materiály najde a my se nyní posuneme dopředu k pravděpodobnosti.

Stručně by vzoreček na pravděpodobnost vypadal takhle: počet všech možností, které vyhovují naší podmínce děleno počtem všech možností daného jevu. Radši spěchejme k příkladu, tam to vysvětlíme snad lépe.

Příklad 4.3. Mějme dány tři osudí. V prvním osudí máme 3 bílé kuličky a 2 černé, v druhém 4 bílé a 1 černou a ve třetím jen 6 bílých. Náhodně sáhneme do jednoho z osudí a vybereme kuličku. Jaká je pravděpodobnost, že bude vybraná kulička bílá?

BRKOS Team 2011

Řešení. Rozdělme si nejprve příklad na tři části.

i) Sáhli jsme do prvního osudí. Naši podmínce vyhovují 3 možnosti z 5, protože právě 3 kuličky jsou v prvním osudí bílé. Máme tedy pravděpodobnost $\frac{3}{5}$.

ii) Sáhli jsme do druhého osudí. Zde vyhovují 4 možnosti z 5. Pravděpodobnost je tedy $\frac{4}{5}$.

iii) Sáhli jsme do třetího osudí. Zde všechny možnosti vyhovují naší podmínce, tedy pravděpodobnost je $\frac{6}{6}$, neboli 1.

Nyní použijeme již výše zmíněná pravidla součtu a součinu a vše dáme dohromady. Máme tedy $\frac{1}{3}$ šanci, že sáhneme do prvního osudí a zde je $\frac{3}{5}$ šance, že bude kulička bílá. Stejnou úvahu můžeme provést i se zbylými dvěma osudími a dostáváme tak výslednou pravděpodobnost: $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{12}{15}$. Když bychom to chtěli vyjádřit procentuálně, vyjde nám $\frac{12}{15} \cdot 100 = 80\%$.

Ale teď už trochu formálněji, začněme základními pojmy:

Definice 4.1. *Náhodným pokusem rozumíme experiment, který za stálých podmínek dává různé výsledky.*

Tedy náhodným pokusem můžeme rozumět například hod mincí s výsledky rub a líc.

Definice 4.2. *Množinu všech výsledků náhodného pokusu nazýváme množinou elementárních jevů Ω, jeden konkrétní výsledek pak elementární jev.*

V našem případě s mincí je danou množinou $\Omega = \{\text{rub, líc}\}$.

Definice 4.3. *Náhodným jevem A rozumíme libovolnou podmnožinu Ω.*

A teď už k definici tzv. klasické pravděpodobnosti.

Definice 4.4. *Za předpokladu, že množina Ω je konečná a všechny elementární jevy jsou stejně pravděpodobné, pak pravděpodobností náhodného jevu A rozumíme: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ (zde $|X|$ značí počet prvků množiny X)*

Tedy v našem případě nechť jev A říká, že padl rub. Tedy $A = \{rub\}$, pak $|A| = 1$ a $P(A) = \frac{1}{2}$. Pokud by jev B byl „padne mi rub nebo líc", pak je pravděpodobnost $P(B) = \frac{2}{2} = 1$.

Opačným jevem k jevu A nazveme jev A' pokud platí $A' = \Omega \setminus A$ (tedy pokud je doplňkem jevu A v elementárním prostoru) a pro jeho pravděpodobnost platí: $P(A') = 1 - P(A)$.

Dále by nás mohla zajímat pravděpodobnost jevu, pokud známe výsledek jevu jiného. Této pravděpodobnosti říkáme podmíněná.

Například házíme kostkou a zajímá nás, jaká je pravděpodobnost, že padne 6. Tato pravděpodobnost je samozřejmě $1/6$. Jaká je ale pravděpodobnost, že padne 6, pokud víme, že padlo sudé číslo?

Definice 4.5. *Podmíněnou pravděpodobností jevu A za předpokladu, že známe výsledek jevu B rozumíme hodnotu $P(A|B)$ danou vzorcem*

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B).$$

Pravděpodobnost 6 za předpokladu, že padlo sudé číslo je tedy $\frac{1/6}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

Jevy A, B se nazývají nezávislé, pokud platí, že $P(A|B) = P(A)$, tedy informace o jevu A se mi prozrazením jevu B nezmění. Dosazením do vzorce pro podmíněnou pravděpodobnost dostáváme: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Typickým příkladem na nezávislé jevy a jejich pravděpodobnost jsou dva střelci. Jeden z nich má pravděpodobnost, že sestřelí cíl 0,8; druhý 0,9. Protože se vzájemně vůbec neovlivňují, tak pravděpodobnost, že oba sestřelí cíl je $0,8 \cdot 0,9 = 0,72$.

Definice 4.6. *Nechť máme jevy $B_1, B_2, \ldots, B_n$ a to takové, že jsou po dvou neslučitelné, tedy pro všechny $i \neq j \leq n$ platí $B_i \cap B_j = \{\}$. Pak vzorcem pro úplnou pravděpodobnost jevu A rozumíme rovnici*

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n).$$

Vzorec pro úplnou pravděpodobnost nám tedy určuje vztah mezi celkovou pravděpodobností jevu a podmíněnými pravděpodobnostmi jevu za všech možných okolností, které mohou nastat.

Například na jev A, že nám padla 1 nebo 2, se můžeme dívat jako na pravděpodobnost jevu A za předpokladu, že padlo sudé číslo (B_1) a pravděpodobnost jevu A za předpokladu, že padlo číslo liché (B_2). Dostáváme tedy: $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

Na konec vám ještě ukážeme Bayesův vzorec, který určuje pravděpodobnost okolnosti, pokud víme jaký výsledek nastal:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A|B1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)}$$

. Jak jsme na na něj přišli? Poměrně jednoduše: už víme, že $P(B_1|A) = \frac{P(A \cap B1)}{P(A)}$ z definice podmíněné pravděpodobnosti. Přitom $P(A \cap B)$ umíme z té stejné definice vyjádřit i jako $P(A|B) \cdot P(B)$ a dosazením vzorce pro úplnou pravděpodobnost jevu A dostáváme Bayesův vzorec.

Ukažme si nyní vzorový příklad.

Příklad 4.4. Zbyněk se včera vrátil neobvykle pozdě domů. Vrátil se v opravdu výborné náladě. Z toho, jak Zbyňka známe, můžeme říct, že pravděpodobnost toho, že se vrátí s dobrou náladou z BRKOSího srazu je 0,6; pravděpodobnost, že se vrátí s dobrou náladou z konzultace se svým vedoucím diplomky je 0,1 a pravděpodobnost toho, že se vrátí s dobrou náladou ze srazu s bývalými spolužáky je 0,3. Pravděpodobnost, že jde Zbyněk na BRKOSí sraz je $\frac{1}{2}$, pravděpodobnost, že jde k vedoucímu je $\frac{1}{3}$ a pravděpodobnost, že jde na sraz se spolužáky je $\frac{1}{6}$. Jaká je pravděpodobnost toho, že byl včera BRKOSí sraz, jestliže víme, že měl Zbyněk dobrou náladu?

Řešení. Označme si nejprve jev A – Zbyněk má dobrou náladu. Dále postupně jevy B_1, B_2, B_3 že byl včera na BRKOSím srazu, na konzultaci a na srazu se spolužáky. Nyní si můžeme vypsat pravděpodobnosti ze zadání.

$$\begin{aligned}P(A|B_1) &= 0,6\\ P(A|B_2) &= 0,1\\ P(A|B_3) &= 0,3\\ P(B_1) &= \frac{1}{2}\\ P(B_2) &= \frac{1}{3}\\ P(B_3) &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Zadání se nás ptá na $P(B_1|A)$, takže nyní si údaje rozepíšeme do Bayesova vzorce.

$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)\cdot P(B_1)}{P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)+P(A|B_3)\cdot P(B_3)} = \frac{0,6\cdot\frac{1}{2}}{0,6\cdot\frac{1}{2}+0,1\cdot\frac{1}{3}+0,3\cdot 1/6} = 0,78$

Tato pravděpodobnost vyjádřená v procentech je přibližně 78%.

Doufáme, že vám uvedené příklady pomohou se poprat se čtvrtou sérií.