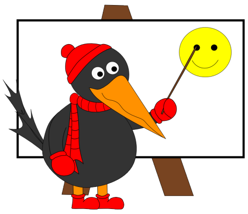
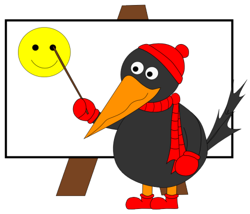


Pomocný text

Rovnice



3.1 Rovnice

Rovnice s jednou nebo více neznámými hrají v matematice i v praktickém životě velmi důležitou roli. Pojem rovnice je dost obecný a zahrnuje pod sebe lineární a kvadratické rovnice, které každý zná ze základní školy. Obtížnějšími úlohami jsou rovnice vyšších řádů (kubické a vyšší), goniometrické, mocninné, logaritmické, exponenciální,...

Při matematických výpočtech nemusíme řešit jen jednu rovnici, ale úloha může obsahovat systém více rovnic. Například v 80. letech minulého století zajímala Stephena Heppe vítězná strategie ve stolní hře Monopoly. Zajímalo ho, jaký majetek z Monopoly má větší stupeň návratnosti z každého investovaného dolaru než jiný. Jeho systém obsahoval 123 lineárních rovnic se 123 neznámými a podařilo se mu proniknout do tohoto systému jen pomocí počítače, který měl naštěstí dostupný. K čemu dospěl a co vše lze spočítat při hledání vítězné strategie ve hře Monopoly, lze najít v článku *Matrix Mathematics: How to Win at Monopoly (1985, Science Digest)* od Dr. Cryptona.

V našem povídání se omezíme pouze na základní informace o kvadratických a kubických rovnicích, goniometrických rovnicích a soustavách rovnic.

3.2 Rovnice vyšších řádů

Kvadratickou rovnici tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, umí pomocí diskriminantu D vyřešit prakticky každý. Tato rovnice může mít $0, 1$ nebo 2 kořeny. Pro zopakování uveďme vztah pro diskriminant a kořeny kvadratické rovnice:

$$D = b^2 - 4ac, \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Pokud kvadratickou rovnici vydělíme vedoucím koeficientem a, obdržíme normovanou rovnici $x^2 + px + q = 0$, kde $p, q \in \mathbb{R}$. Jestliže má tato rovnice dvě (ne nutně různá) řešení x_1 a x_2, pak platí $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$. Roznásobením pravé strany a porovnáním s levou obdržíme tzv. **Viètovy vztahy**

$$x_1 + x_2 = -p \qquad x_1 x_2 = q.$$

Tyto vztahy se hlavně využívají v příkladech, ve kterých počítáme s kvadratickou rovnicí a jejími kořeny, ale nepotřebujeme jejich přímé vyjádření.

Příklad 3.1. Je dána kvadratická rovnice $\frac{1}{9}x^2 - 3x + 20 = 0$. Aniž byste počítali její kořeny, napište kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou převrácené hodnoty kořenů dané rovnice.

Řešení. Rovnici převedeme do normovaného tvaru $x^2 - 27x + 180 = 0$. Pomocí Viètových vztahů dostáváme

$$x_1 + x_2 = 27 \qquad x_1 x_2 = 180.$$

Pro nové kořeny $x_1^* = \frac{1}{x_1}, x_2^* = \frac{1}{x_2}$ pak platí

$$\begin{aligned} x_1^* + x_2^* &= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{27}{180} = -p^*, \\ x_1^* x_2^* &= \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{180} = q^*. \end{aligned}$$

Vypočítané hodnoty dosadíme do rovnice $x^2 + p^*x + q^* = 0$ a po úpravě dostaneme hledanou rovnici $180x^2 - 27x + 1 = 0$.

Viètovy vztahy pro kubickou rovnici

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0,$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, s kořeny x_1, x_2 a x_3 jsou tvaru

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 &= \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a}. \end{aligned}$$

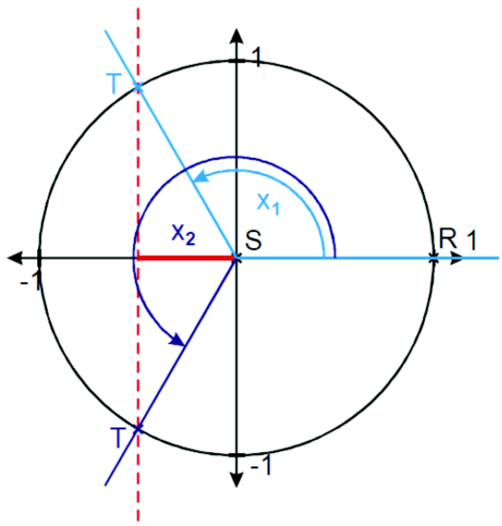
Ty rovnice jsou pěkně pravidelné, že? Už tušíte, jak by vypadal obecný předpis pro rovnici n-tého stupně?

3.3 Goniometrické rovnice

Goniometrické rovnice nejsou zrovna nejlehčí kapitolou. Pro pochopení následujících příkladů je dobré vědět něco o goniometrických funkcích a vztazích mezi nimi, základních goniometrických rovnicích a samozřejmě musíte umět nahradit každý prvek této řady příslušnými reálnými hodnotami: $\sin 360°, \cos \pi, \sin \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg} 30°$. Základní informace o goniometrických funkcích, vztazích mezi funkcemi a upravě výrazů naleznete v loňském povídání `http://brkos.math.muni.cz/files/povidani/povidani173.pdf`.

Goniometrickými rovnicemi rozumíme takové rovnice, kde se vyskytují goniometrické funkce neznámého argumentu (sinus, kosinus, tangens nebo kotangens). Vzhledem k periodičnosti goniometrických funkcí může mít goniometrická rovnice nekonečně mnoho kořenů. Každý kořen goniometrické rovnice, pro který platí $0 \leq x \leq 2\pi$, nazýváme základním kořenem této rovnice.

Jako **základní goniometrické rovnice** lze považovat rovnice typu $\cos x = -0,5$. Tuto rovnici už nelze více upravit a většina si už povšimla, že ji není těžké vyřešit. Splňují ji všechna $x_1 = 120° + k \cdot 360°$ a $x_2 = 240° + k \cdot 360°$, kde $k \in \mathbb{Z}$ (nesmíme zapomenout na periodičnost funkce). Pokud vám to stále nedošlo, pomozte si jednotkovou kružnicí na obrázku níže. Do tohoto základního tvaru se snažíme upravit jakoukoliv goniometrickou rovnici pomocí substituce, goniometrických vzorců a jiných úprav.



Příklad 3.2. Vyřešte goniometrickou rovnici: $\sin 4x = \sin 2x$.

Řešení. Rovnici se budeme snažit upravit do základního tvaru, abychom následně určili neznámou. Nejprve využijeme pro $\sin 4x$ vztahu $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Pak dostáváme

$$2 \sin 2x \cos 2x = \sin 2x$$
$$\sin 2x(2 \cos 2x - 1) = 0$$

Tento součin bude nulový, když $\sin 2x = 0$ nebo $\cos 2x = \frac{1}{2}$. První rovnice bude splněna pro $2x = 0 + k\pi$, tj. $x = k\frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Druhá rovnice bude splněna pro

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, tj. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Řešení rovnice:

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \right\}.$$

3.4 Soustavy rovnic s více neznámými

O soustavách lineárních rovnic jste ve škole určitě slyšeli. Hned vás napadly různé metody jejich řešení: sčítací, dosazovací, grafická. Možná jste už při řešení zkoušeli i matice nebo determinanty. Pokud ale řešíme soustavy rovnic nelineárních, už musíme při řešení použít trochu kreativity a cviku. Snažit se rovnici nějak upravit ekvivalentními úpravami, aby šla dosadit do druhé. Pomůže také odhadnout pomocí různých vzorců jakých hodnot může asi neznámá nabývat a zda vůbec má rovnice řešení. Zkusme si to ukázat spíše na příkladu.

Příklad 3.3. Najděte všechna kladná celá čísla, která jsou řešením následující soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} m^{m+n} &= n^{12}, \\ n^{m+n} &= m^3. \end{aligned}$$

Řešení. Předpokládejme, že existuje prvočíslo p, které dělí celé číslo n. Z první rovnice pak plyne, že musí p dělit také číslo m. Dále předpokládejme, že p^a je nejvyšší mocnina p, která dělí m. Obdobně p^b je nejvyšší mocnina dělící n. Poté dostáváme

$$\begin{aligned} a(m+n) &= 12b, \\ b(m+n) &= 3a. \end{aligned}$$

Odtud snadno odvodíme, že

$$36b = 3a(m+n) = b(m+n)^2,$$

a proto dostáváme $m+n = 6$ a $a = 2b$. Toto splňuje jediná dvojice čísel: $(m, n) = (4, 2)$.

Teď se vrhněte na řešení série. Věříme, že ji budete mít vyřešenou raz dva.

BRKOS Team 2011