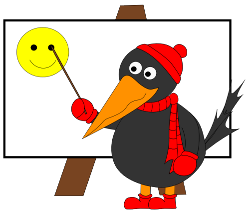
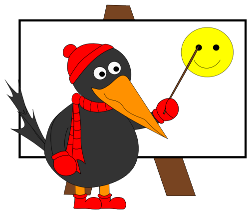


Pomocný text

Geometrie



Toto krátké úvodní povídání není nutné k vyřešení úloh v sérii. Nabízí pouze trochu omáčky okolo a podává lepší vhled do tématu.

Euklidovská konstrukce

Standardní konstrukční úlohy se zabývají konstrukcemi pomocí *pravítka a kružítka*. Pravítko uvažujeme bez měřítka či rysky, tedy pouze nástroj, co umí propojit dva body libovolně dlouhou úsečkou. Již starověcí matematikové narazili na tři zajímavé konstrukční problémy, které neuměli vyřešit:

Zdvojení krychle. Je možné zkonstruovat délku hrany krychle, jejíž objem je dvojnásobkem dané krychle? Ekvivalentě lze problém formulovat takto: Lze zkonstruovat třetí odmocninu ze zadané délky?

Trisekce úhlu. Je možné rozdělit úhel na tři stejné části?

Kvadratura kruhu. Je možné zkonstruovat čtverec o stejném obsahu jako má zadaný kruh?

Dříve či později se ukázalo, že odpověď na všechny tyto tři otázky je negativní. Bylo tedy jasné, že tyto standardní konstrukce nejsou všemocné. Vyvstávají proto nové otázky: Existuje nějaká konstrukční metoda, která nám dovolí tyto problémy vyřešit? Co vlastně dokážeme jenom pomocí kružítka či jenom pomocí pravítka?

Konstrukce pomocí kružítka

V 17. století matematik Mohr dokázal, že pravítko je vlastně naprosto přebytečné:

Věta 0.1 (Mohr–Mascheroni)**.** *Všechny konstrukce možné pomocí pravítka a kružítka lze provést* pouze pomocí kružítka.

Důkaz lze provést rozborem několika standardních konstrukcí. O každé se nejprve ukáže, že lze provést pouze pomocí kružítka, a poté se dokáže, že pomocí těchto konstrukcí umíme pravítko kružítkem plně nahradit.

Konstrukce pomocí pravítka

Zde je situace horší než v předchozím případě. Pouze pomocí pravítka například nelze zkonstruovat druhou odmocninu ze zadané délky či střed dané kružnice. Podle následující věty však situace není beznadějná.

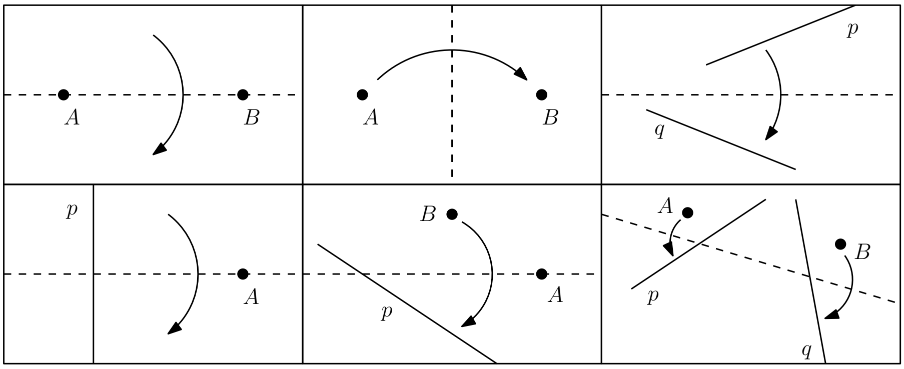
Věta 0.2 (Poncelet–Steiner)**.** *Všechny konstrukce možné pomocí pravítka a kružítka lze provést* pouze pomocí pravítka*, je-li v rovině dána jedna kružnice a její střed.*

Po vyřešení třetí úlohy budete také vědět, že také postačují dvě protínající se kružnice (bez středu).

Přehýbání papíru

Předchozí případy byly o konstrukcích s omezenými prostředky. Na zmíněné tři starověké problémy nám tedy určitě nepomohou. Zajímavou rozšiřující technikou je ohýbání papíru, podobné jako při origami. Přehýbací konstrukce jsou založeny na následujících šesti axiomech(*Huzita–Hatoriho axiomy*), které říkají, co s papírem umíme dobře provádět.

1. Máme-li dány body A, B, umíme udělat přehyb, který jimi prochází.
2. Máme-li dány body A, B, umíme udělat přehyb, který přehne bod A na B.
3. Máme-li dány dvě přímky p, q, umíme udělat přehyb, který přehne přímku p na q.
4. Máme-li danou přímku p a bod A, umíme udělat přehyb kolmý na přímku p, který prochází bodem A.
5. Máme-li danou přímku p a body A, B, umíme udělat přehyb, který prochází bodem A a bod B přehne na přímku p.
6. Máme-li dvě přímky p, q a body A, B, umíme udělat přehyb, který přehne bod A na p a bod B na q.



Všechny přehyby z axiomů 1–5 lze snadno zkonstruovat pomocí kružítka a pravítka. Všechny přehýbací konstrukce využívající pouze tyto axiomy lze tedy zkonstruovat i standardním způsobem. Naopak ale existují euklidovské konstrukce, které pomocí těchto přehýbacích axiomů nesestrojíme. Prvních pět axiomů je tedy konstrukčně slabších než kružítko a pravítko.

Přehyb z axiomu 6 lze při troše šikovnosti s papírem snadno zvládnout, ale zkonstruovat ho standardní metodou se nám nepovede. Ve skutečnosti šestý axiom výrazně rozšiřuje naše konstrukční schopnosti. Nejen, že s ním dovedeme napřehýbat vše, co lze zkonstruovat pravítkem a kružítkem, ale i něco navíc. Ve čtvrté úloze je popsána přehýbací konstrukce využívající šestého axiomu a Vaším úkolem je ukázat, že tato konstrukce řeší úlohu zdvojení krychle. Přehýbáním umíme také roztřetit úhel, kvadraturu kruhu však stále nezvládneme.

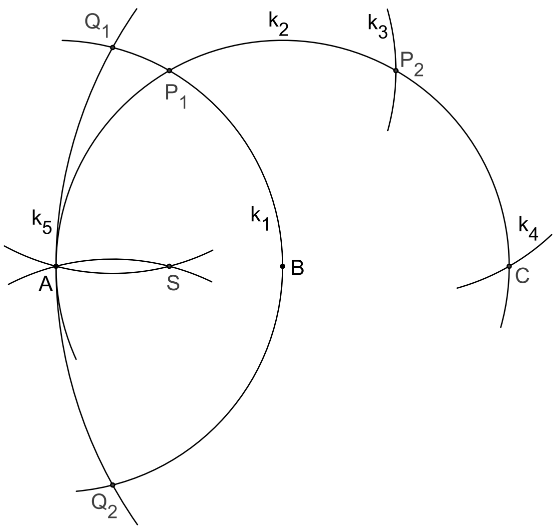
Motivační úloha

Ještě než se vrhnete na zadání, pojďte si s námi projít komentované řešení jedné středně náročné úlohy. Znalost řešení pak jistě zužitkujete i v jedné úloze ze zadání.

Příklad 0.1 (Motivační)**.** V bodě jsou dány dva body A a B. Pouze pomocí kružítka nalezněte střed této úsečky.

Všimněme si, že když máme zadány dva body a k dispozici pouze kružítko, není tolik konstrukcí, které můžeme ihned provést (opomeneme-li „narýsovat z náhodného bodu kružnici o náhodném poloměru“, což k řešení pravděpodobně nepovede). Tak třeba dokážeme vynést dvě kružnice o poloměru $|AB|$ se středy A a B. Uvidíme, že to není špatný nápad a tyto kružnice budou dvěma ze sedmi potřebných kružnic k vyřešení úlohy. Na obrázku jsou označeny jako k_1 a k_2.

Nyní nastiňme ideu řešení. Hodilo by se nám umět zkonstruovat kružnici, která prochází hledaným středem úsečky (vlastně alespoň dvě takové kružnice). Průsečík P_1 kružnic k_1 a k_2 leží na ose úsečky AB. To znamená, že vzdálenost z něj do A je stejná jako do B. Jinými slovy když narýsujeme kružnici z bodu P_1 o poloměru $|AP_1|$, bude tato kružnice procházet bodem B. Co kdybychom ale byli schopni nalézt bod na ose úsečky AS (kde S je hledaný střed AB)? Potom by stačilo zabodnout kružítko do tohoto bodu a vytvořit kružnici procházející bodem A. Na této kružnici bude ležet hledaný střed S. Toto je správná úvaha a jedna ze správných cest k řešení.



Nejprve nalezneme bod C takový, že B je střed úsečky AC. Tato konstrukce je celkem jednoduchá a můžete ji rozmyslet sami (nebo odkoukat z obrázku). Z bodu C narýsujeme kružnici o poloměru $|AC|$ (tedy dvojnásobku $|AB|$). Tato kružnice k_5 se protne s k_1 v bodech Q_1 a Q_2. Tyto body leží na ose AS (důkaz, který by správné řešení určitě mělo obsahovat, rozmyslete). Nyní už není těžké pomocí dvou kružnic, v obrázku nepojmenovaných, najít bod S a je hotovo.