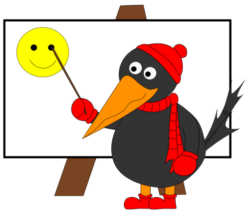
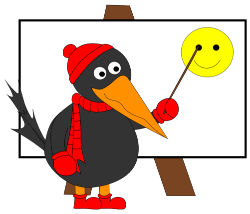


Pomocný text

Pravda a lež



V sérii s názvem Pravda a lež se budeme věnovat výrokové logice, budeme se tedy bavit o výrocích a o tom, jak některé výroky vyplývají z jiných. Pojďme si nejprve samotný pojem „výrok“ trochu upřesnit.

Výrokem je každé tvrzení, o jehož pravdivosti má smysl uvažovat. Jinými slovy, každému výroku lze přiřadit pravdivostní hodnotu – buď 0 (lež), nebo 1 (pravda).

Příklady výroků:

- Prší.
- Jdu do školy.
- $2 + 2 = 5$

Naopak výroky nejsou: „Prší?“, „Choď do školy!“, „$x + 2 = 5$“.

Operace s výroky

Výše uvedené výroky byly tvořeny jednoduchými větami. Složitější výroky z nich je možné vytvářet pomocí negace a logických spojek, což odpovídá skládání vět do souvětí. Negace vždy mění pravdivostní hodnotu výroku. V češtině odpovídá připojení věty „Není pravda, že…“. Negace výše uvedených výroků jsou pak

- Není pravda, že prší.
- Nejdu do školy.
- $2 + 2 \neq 5$

V dalším textu nás nebudou zajímat konkrétní výroky, ale jejich obecnější vlastnosti. Výroky proto nahradíme proměnnými (A, B,…). Negaci budeme značit symbolem $\neg$, tedy negaci výroku A zapisujeme $\neg A$. Výrok $\neg(\neg A)$ je dvojitou negací výroku A a má proto vždy stejnou pravdivostní hodnotu jako A.

Nejčastěji používané logické spojky jsou konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence – každá z nich spojuje dva výroky do jednoho (takovým spojkám se říká *binární*). Význam těchto spojek a běžně používaná symbolika jsou uvedeny níže:

- $A \wedge B$ – konjunkce (význam „platí A a současně B“)
- $A \vee B$ – disjunkce (význam „platí A nebo B“)

- $A \Rightarrow B$ – implikace (význam „pokud platí A, platí také B“)
- $A \Leftrightarrow B$ – implikace (význam „A platí právě tehdy, když platí i B“)

Konjunkce je pravdivá, pokud jsou oba výroky A, B pravdivé. Disjunkce je pravdivá, pokud je pravdivý alespoň jeden z výroků (proto také výše uvádíme spojku „nebo“ bez čárky; významu „platí buď A, nebo B“ by odpovídala tzv. exkluzivní disjunkce, o které se tu dále zmiňovat nebudeme). K tomu, aby platila implikace, je třeba, aby bylo B pravdivé nebo A nepravdivé. Například věta „Pokud je sníh běžně zelený, je sníh běžně červený.“ je pravdivá. Ekvivalence je pravdivá, pokud jsou oba výroky A, B pravdivé, nebo pokud jsou oba nepravdivé.

Při určování pravdivostní hodnoty složených výroků pomocí pravdivostních hodnot výroků dílčích nám pomůže tabulka:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

V levých sloupcích se nachází pravdivostní hodnoty výroků A a B, každý řádek odpovídá jedné kombinaci jejich pravdivostních hodnot. V dalších sloupcích jsou odpovídající pravdivostní hodnoty složených výroků uvedených v záhlavích sloupců. K tabulce bychom si snadno mohli domyslet další sloupec jiným uspořádáním nul a jedniček – získali bychom tak další logickou spojku. Jak snadno rozmyslíme, celkem je binárních logických spojek $2^4 = 16$. Krom binárních logických spojek ale máme i spojky které z n výroků dělají jeden – pro takové spojky by tabulka musela mít 2^n řádků a mohli bychom vytvořit 2^{2^n} různých n-árních spojek.

Pro negování složených výroků platí následující:

$$
\begin{aligned}
\neg(A \wedge B) &\Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)\\
\neg(A \vee B) &\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)\\
\neg(A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow (A \wedge \neg B)\\
\neg(A \Leftrightarrow B) &\Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B))
\end{aligned}
$$

Tato tvrzení se dají se snadno odvodit pomocí tabulky; první dvě z nich v literatuře nazývají De Morganova pravidla.Dalším užitečným vztahem je

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C). \tag{1}$$

Úplné systémy logických spojek

Můžeme si všimnout, že výrok $A \Rightarrow B$ lze zapsat jako $\neg A \vee B$ a výrok $A \Leftrightarrow B$ jako $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$. Nabízí se otázka, zda každou logickou spojku lze zapsat pomocí $\neg$, $\vee$ a $\wedge$. Dále dokážeme, že tomu tak je.

Uvažme pravdivostní tabulku nějaké logické spojky $h(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Pro každý řádek, v němž je $h(A_1, \ldots, A_n) = 1$ umíme pomocí konjunkcí a negací vyrobit výrok, který je pravdivý pro tento řádek a nepravdivý pro všechny ostatní (vezmeme konjunkci všech proměnných, které mají na daném řádku hodnotu 1 a dalšími konjunkcemi k nim připojíme negace proměnných, které mají hodnotu 0). Takto vzniklým výrokům budeme říkat klauzule. Pak stačí všechny tyto klauzule posbírat a spojit disjunkcemi (výrok $h(A, B, C)$ je pravdivý, pokud je *alespoň jedna* klauzule pravdivá).

Pro konkrétní spojku $h(A, B, C)$ danou tabulkou

A	B	C	$h(A, B, C)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

byhom tímto algoritmem dostali ekvivalentní výrok $((\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C))$. Tento výrok nazýváme normální disjunktivní formou výroku $h(A, B, C)$.

Protože jsme ukázali, že pomocí $\neg$, $\vee$ a $\wedge$ lze vytvořit jakoukoliv spojku, říkáme, že $\{\neg, \vee, \wedge\}$ je úplný systém logických spojek. Úplným systémem je také například $\{\neg, \Rightarrow\}$ a dokonce existují i jednoprvkové úplné systémy.

Důkazy

Základním stavebním kamenem moderní matematiky je důkaz. Důkaz je posloupnost logických kroků, v nichž se z předpokladu (A) snažíme vyvodit závěr (Z), dokazujeme tedy platnost implikace $A \Rightarrow Z$. Existují tři typy důkazů:

Přímý důkaz najdeme posloupnost implikací $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, $\ldots Y \Rightarrow Z$, z nichž každá se opírá o nějaké známé tvrzení. Pokud jsou všechny tyto implikace pravdivé, opakovaným užitím (**??**) dostáváme platnost implikace $A \Rightarrow Z$.

Nepřímý důkaz najdeme posloupnost implikací $\neg Z \Rightarrow \neg Y$, $\ldots$, $\neg B \Rightarrow \neg A$. Protože je $\neg B \Rightarrow \neg A$ ekvivalentní s $A \Rightarrow B$, je tento způsob jen obměnou způsobu předchozího.

Důkaz sporem najdeme posloupnost implikací $A \wedge \neg Z \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, $\ldots Y \Rightarrow \zeta$, kde ζ je výrok, který není nikdy pravdivý. Máme tak $(A \wedge \neg Z) \Rightarrow \zeta$, což může být splněno pouze pokud neplatí $A \wedge \neg Z$. Dle De Morganových pravidel pak platí $\neg A \vee Z$, neboli $A \Rightarrow Z$; proto i tento způsob je ekvivalentní s prvním.

Tolik teorie k důkazům. K řešení (nejen) prvních dvou sérií se vám budou důkazy hodit – pokud řešíte náš seminář poprvé, doporučujeme si projít řešení úloh z minulých ročníků na našem webu, abyste si udělali bližší představu, jak pořádný důkaz vypadá.