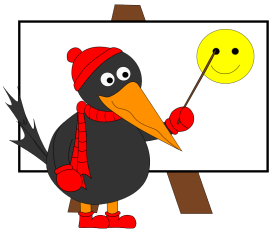
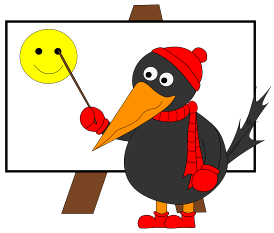


Pomocný text

FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE



Rovnice, jejichž řešením je číslo nebo množina čísel, znáte důvěrně ze školy a s některými trikovějšími jste se potkali i v našem semináři. V této sérii se podíváme na to, jak se řeší rovnice, jejichž řešením má být nějaká funkce.

Nejprve si ujasněme, co to vlastně funkce je.

Definice 6.1. *Funkce je množina f dvojic (x, y) reálných čísel taková, že pro každé reálné x je v množině takováto dvojice nejvýše jedna. Skutečnost $(x, y) \in f$ zapisujeme jako $f(x) = y$. Množinu x takových, že pro nějaké y je $(x, y) \in f$ nazýváme definičním oborem f, značíme $D(f)$. Množinu všech y, pro která existuje x splňující $(x, y) \in f$ nazveme oborem hodnot f.*

Přestože se většinou setkáváme s funkcemi, které mají nějaký konečný předpis (např. $f(x) = x^2$, $g(x) = sin(x) + x$ nebo "$h(x)$ je nejmenší prvočíslo větší než x"), definice o existenci takového předpisu nezaručuje. Dokonce drtivá většina funkcí žádný takový předpis nemá.

U funkcí lze zkoumat řadu vlastností. Funkce f může být

rostoucí, pokud pro každou dvojici reálných čísel splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$,

klesající, pokud pro každou dvojici reálných čísel splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$,

nerostoucí, pokud pro každou dvojici reálných čísel splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$,

neklesající, pokud pro každou dvojici reálných čísel splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$,

ryze monotónní, pokud je rostoucí nebo klesající,

monotónní, pokud je nerostoucí nebo neklesající,

prostá (injektivní), pokud pro žádná dvě $x_1 \neq x_2$ neplatí $f(x_1) = f(x_2)$,

na (surjektivní), pokud pro každé reálné y existuje x takové, že $f(x) = y$,

bijektivní, pokud je injektivní a surjektivní,

sudá, pokud pro všechna x platí $f(x) = f(-x)$,

lichá, pokud pro všechna x platí $f(x) = -f(-x)$,

omezená shora (zdola), pokud existuje t takové, že pro všechna x platí $f(x) < t$ (resp. $f(x) > t$),

omezená, pokud je omezená shora i zdola,

periodická, pokud existuje p takové, že $x + p \in D(f)$, právě když $x \in D(f)$ a $f(x + p) = f(x)$,

multiplikativní, pokud pro všechna x, y z definičního oboru leží xy v definičním oboru a $f(xy) = f(x)f(y)$.

Dosadíme, co umíme

Základní metodou řešení funkcionálních rovnic je dosazování hodnot a kombinování získaných rovností.

Příklad 6.1. Najděte všechny rostoucí funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná x, y platí

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Tato funkcionální rovnice je známá jako Cauchyova. K jejímu vyřešení nám stačí několik málo dosazení. Nejprve za x i y dosadíme nulu. Dostaneme tak, že $f(0) = f(0) + f(0)$, odtud $f(0) = 0$. Dále když za y dosadíme x, dostaneme $f(2x) = 2f(x)$. Když za y dosadíme $2x$, dostaneme $f(3x) = f(2x) + f(x)$, což je dle předchozího rovno $3f(x)$. To nás dovede k předpokladu, že pro přirozené číslo n platí $f(nx) = nf(x)$, které nyní dokážeme indukcí. Pro $n = 1$ není co řešit, pojďme na indukční krok. Předpokládejme, že to platí pro $n = k$ a dokažme to pro $n = k+1$. Dosazením za $y = kx$ máme $f((k+1)x) = f(x)+f(kx) = f(x)+kf(x) = (k+1)f(x)$, což jsme chtěli dokázat. Pokud za y do původní rovnice dosadíme $-x$, máme $f(0) = f(x) + f(-x)$, s využitím $f(0) = 0$ pak $f(-x) = -f(x)$, pro přirozené n pak $f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$ – rovnost $f(kx) = kf(x)$ proto platí nejen pro přirozená čísla, ale i pro záporná a nulu. Jsou-li p, q celá čísla, $q \neq 0$, máme dvojím použitím předchozí rovnosti $qf(\frac{p}{q}) = f(p) = pf(1)$, odtud $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}f(1)$. Dokázali jsme, že pro všechna racionální x platí $f(x) = xf(1)$.

Cauchyho funkcionální rovnice nám bohužel víc informací o funkci nedá – vyhoví jí například funkce taková, že $f(x) = x$ pro racionální x, $f(x) = -x$, je-li x součin racionálního čísla a π a $f(x) = 0$ jinak. Využijeme proto toho, že má jít o rostoucí funkci. Předpokládejme, že by pro nějaké iracionální t platilo $f(t) > tf(1)$ (pro $f(t) < tf(1)$ stačí v následujícím odstavci prohodit znaménka). Pak vybereme racionální číslo r splňující $t < r < f(t)/f(1)$. Platí $f(t) > rf(1) = f(r)$, protože jde ale o rostoucí funkci, je $f(r) > f(t)$, což je spor.

Dokázali jsme tak, že musí platit $f(x) = xf(1)$ pro všechna reálná x. Navíc snadno ověříme, že všechny funkce tvaru $f(x) = cx$ (kde $c = f(1)$ je libovolné reálné číslo) opravdu vyhovují zadání.

Výše uvedený postup se dá snadno modifikovat pro funkcionální rovnici $f(xy) = f(x)f(y)$, kde $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ je rostoucí funkce. Řešením jsou v tomto případě všechny funkce tvaru $f(x) = x^c$. Známá je také Jensenova rovnice, která je tvaru $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má být opět rostoucí funkce. Jejím řešením jsou všechny lineární funkce $f(x) = ax + b$. Znalci nerovností zde jistě vidí jistou souvislost s Jensenovou nerovností.

Hledání vlastností

Velmi užitečné je hledat u funkcí surjektivitu, injektivitu, monotonii, sudost, lichost a případně multiplikativitu. Demonstrujeme to na úloze z IMO 1992.

Příklad 6.2. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná x, y platí $f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2$.

Nejprve dokažme surjektivitu. Položme $x = 0$. Pokud budeme měnit y, nabude pravá strana všech reálných hodnot. Na levé straně je vždy funkční hodnota f – proto je oborem hodnot f celá množina $\mathbb{R}$.

Kdyby pro dvě různá y_1, y_2 platilo $f(y_1) = f(y_2)$, bylo by $f(x^2 + f(y_1)) = f(x^2 + f(y_2))$, ze zadané rovnice pak $y_1 + f(x)^2 = y_2 + f(x)^2$, což je spor s růzností y_1, y_2. Tím je dokázaná injektivita.

Protože je f bijekcí, existuje jediné t takové, že $f(t) = 0$. Když toto t dosadíme za x i y, máme $f(t^2) = t$. Dále položíme $y = t^2$, $x = 0$ a máme $f(0 + f(t^2)) = t^2 + f(0)^2$. Na levé straně je dle předchozího $f(0 + t) = 0$, proto $t = f(0) = 0$. Dosazením $x = 0$ do původní rovnice máme $f(f(y)) = y$. Navíc když do původní rovnice dosadíme $y = 0$, máme $f(x^2) = f(x)^2$. Pokud tedy do původní rovnice za y dosadíme $f(z)$, dostaneme z přechozích dvou vztahů $f(x^2 + z) = f(z) + f(x)^2 = f(z) + f(x^2)$.

To je ale v podstatě Cauchyho rovnice – sice x^2 může nabývat pouze kladných hodnot, ale na důkaz toho, že $f(x) = f(1)x$ pro všechna kladná racionální x, nám to stačí. Ze vztahu $f(x^2 + z) = f(z) + f(x)^2$ navíc vidíme, že je funkce neklesající (každé číslo $z' > z$ lze psát ve tvaru $z + x^2$ a pro každé takové číslo je $f(z') = f(z) + f(x)^2 \geq f(z)$). Tím jsme vztah $f(x) = xf(1)$ rozšířili na nezáporná reálná čísla.

Abychom ho rozšířili i na čísla záporná, dokážeme, že je funkce lichá. Užitím vztahu $f(x^2) = f(x)^2$ máme $f(x)^2 = f(-x)^2$, protože pro x různé od nuly nemůže nastat $f(x) = f(-x)$ (funkce je prostá), máme $f(x) = -f(x)$. Tím jsme dokázali, že hledaná funkce musí být tvaru $f(x) = cx$.

U funkcionálních rovnic je velmi důležitá zkouška. Po dosazení za f máme $c(x^2 + cy) = y + x^2$. Toto musí platit pro všechna x, y, dosazením $x = 0$ a $y = 1$ máme $c = 1$. Když za c jedničku dosadíme, dostaneme platnou rovnost $x^2 + y = x^2 + y$. Tím jsme dokázali, že zadané rovnici vyhoví právě funkce $f(x) = x$.

V úvodu sekce jsme uvedli, že je zajímavé zkoumat multiplikativitu. To platí zejména pokud je definičním oborem množina přirozených čísel. V takovém případě jsou všechny hodnoty funkce určeny hodnotami na prvočíslech. Pěknou ukázkou takové úlohy je třetí příklad celostátního kola 56. ročníku MO:

Příklad 6.3. Uvažujme všechny funkce $f : \mathbb{N} \to N$ takové, že pro každá dvě přirozená čísla x, y platí $f(xf(y)) = yf(x)$. Určete nejmenší možnou hodnotu $f(2007)$.

Řešení lze najít na adrese `https://www.math.muni.cz/~rvmo/ABC/56/A56iiiz.pdf`.

Pryč se symetrií

Často bývá dobré dosadit $x = a$, $y = b$ a v zápětí $x = b$, $y = a$ a porovnat oba výsledky. Pro usnadnění tohoto postupu můžeme sesypat na levou stranu všechny členy rovnice, které jsou symetrické vzhledem k záměně proměnných. Například rovnici

$$f(f(xy) + f(x) + f(y)) - x = f(f(xy)) + xf(y)$$

upravíme na

$$f(f(xy) + f(x) + f(y)) - f(f(xy)) = x + xf(y)$$

a hned vidíme, že výše uvedené substituce nám dají vždy stejnou levou stranu, na pravé straně dostaneme jednou $a(1 + f(b))$ a podruhé $b(1 + f(a))$. Po dosazení za $a = 1$ pak $f(b) = cb - 1$, kde $c = f(1) + 1$. Když dosadíme a provedeme zkoušku, dostaneme $c = 0$. Jedinou vyhovující funkcí je tak $f(x) = -1$.

Posloupnost iterací

Posloupnost iterací funkce f v bodě x je posloupnost, která má následující podobu: $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots$. Prvky této posloupnosti nazýváme iteracemi funkce f. Tvar této posloupnosti nám může pomoci řešit úlohy, v nichž se vyskytují iterace.

Příklad 6.4. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující

$$5f(x) = 2x + 2f(f(x))$$

Zvolme pevné t a uvažme posloupnost $a_0 = t, a_1 = f(t), a_2 = f(f(t)) \ldots$ pro $n > 2$ platí $2a_n - 5a_{n-1} + 2a_n = 0$. Indukcí snadno ukážeme, že $a_n = c \cdot 2^n + d \cdot (\frac{1}{2})^n$ pro vhodná c, d (ta snadno dopočteme z rovnic $2c + d = t$, $2c + d/2 = f(t)$). Pokud vás zajímá, jak na toto přijít bez zázračného uhodnutí a indukce, pomohou vám materiály z přednášek o vytvořujících funkcích na našem webu. Protože t i $f(t)$ jsou celá čísla, jsou c i d jistě racionální. Kdyby byla konstanta d různá od nuly, od určitého indexu by posloupnost a_n nemohla být celočíselná – její členy by byly zlomky, v nichž mocnina dvojky ve jmenovateli stále roste, zatímco v čitateli je stále stejná. Proto $a_n = c \cdot 2^n$, $c = a_0 = t$, $f(t) = a_1 = 2c = 2t$. Toto musí platit pro všechna t. Zkouškou ověříme, že $f(x) = 2x$ vyhovuje zadání.

Recyklujeme argumenty

Některé funkcionální rovnice jsou založené na tom, že se v rovnici vyskytuje funkce jen s několika málo argumenty $x, g(x), g(g(x)), ...$, přičemž posloupnost v takovém tvaru $(x, g(x), g(g(x)), \ldots)$ je periodická. Nejjednodušším takovým příkladem je $g(x) = -x$ – v takovém případě by mohla zadaná funkcionální rovnice vypadat takto:

$$2f(x) + f(-x) = x$$

Zde stačí za x dosadit $g(x)$ a máme $2f(-x) + f(x) = -x$. Řešením soustavy rovnic pro $f(x)$ a $f(-x)$ pak $f(x) = x$.

Trochu komplikovanější je rovnice $f(\frac{1}{1-x}) + f(x) = 84$. V tomto případě za x dosazujeme postupně $g(x) = \frac{1}{1-x}$ a $g(g(x)) = \frac{x-1}{x}$. Další dosazení není potřeba, neboť $g(g(g(x))) = x$. Ze získaných rovnic $(f(\frac{x-1}{x}) + f(\frac{1}{1-x}) = 84$ a $f(x) + f(\frac{x-1}{x}) = 84)$ a zadané rovnice pak opět řešením soustavy klasických lineárních rovnic dostaneme, že $f(x) = 42$ je jediná funkce vyhovující zadání.