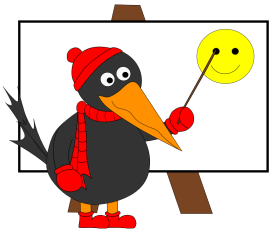
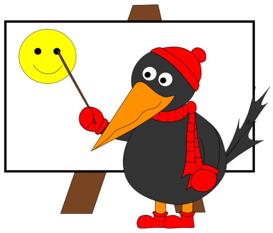


Pomocný text

KRUHOVÁ INVERZE



Co je to kruhová inverze?

Pod pojmem kruhová inverze se rozumí geometrické zobrazení, jehož vlastnostem se nyní budeme věnovat. Nechť je dána rovina, v ní ležící bod O, který se nazývá střed kruhové inverze, a kladné reálné číslo r, tzv. poloměr kruhové inverze. Nechť X je bod různý od bodu O (samozřejmě bod X patří do roviny, se kterou pracujeme, v dalším budeme toto tvrzení vynechávat), pak obrazem bodu X v kruhové inverzi se středem O a poloměrem r je bod X' ležící na polopřímce OX takový, že

$$|OX| \cdot |OX'| = r^2.$$

Zřejmě takovýto bod je právě jeden a naše zobrazení, které budeme dále označovat f, je korektně definované. Jak takový bod zkonstruovat uvedeme závěrem teoretické části tohoto povídání.

Jak se dá zobrazení f reprezentovat analyticky?

Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby bod O měl souřadnice $[0,0]$. Vezmeme si bod $X = [x,y]$. Nechť jeho obraz X' má souřadnice $[x',y']$. Protože bod X' leží na polopřímce OX, existuje kladné číslo k takové, že $x' = kx$ a $y' = ky$. Dále platí

$$|OX| = \sqrt{x^2+y^2}$$

a

$$|OX'| = \sqrt{x'^2+y'^2} = k \cdot \sqrt{x^2+y^2} = k \cdot |OX|.$$

Jelikož má platit

$$|OX| \cdot |OX'| = r^2,$$

tak po dosazení dostáváme

$$k = \frac{r^2}{x^2+y^2}.$$

Tedy $[x,y]$ se zobrazí na

$$\left[\frac{x \cdot r^2}{x^2+y^2}, \frac{y \cdot r^2}{x^2+y^2}\right].$$

BRKOS Team 2010

Vlastnosti kruhové inverze

Dva různé body se zobrazí opět na dva různé body, tedy naše zobrazení je prosté. Ověřte si sami. Každý bod X této roviny, kromě bodu O, umíme zobrazit na nějaký bod X' (také různý od O). Obrazem bodu X' je však náš původní bod X. Body X, X' vytvářejí dvojici navzájem inverzních bodů. Proto zobrazení f je inverzní samo k sobě, tedy platí

$$f^{-1} = f$$

neboli

$$\forall X \neq O : f(f(X)) = X.$$

Geometrické vlastnosti

Podíváme se nyní na obrazy známých množin bodů. Začneme přímkou, která prochází středem inverze O. Každý bod X této přímky různý od bodu O se zobrazí do bodu této přímky a také je vzorem nějakého bodu z této přímky. Proto je tato přímka v kruhové inverzi samodružná.

Zobrazení přímek

Co se stane s přímkou p, která neprochází bodem O? Nechť M je pata kolmice z bodu O na přímku p a nechť A je bod přímky p různý od bodu M. Podíváme se na body A', M'. Z definice inverze víme, že platí

$$|OM| \cdot |OM'| = r^2 = |OA| \cdot |OA'|,$$

odtud $|OM| : |OA'| = |OA| : |OM'|$, trojúhelníky MOA a $A'OM$ jsou tudíž podobné podle věty *sus*, proto velikost úhlu $OA'M'$ je stejná jako $|\measuredangle OMA| = 90°$. Bod A' tak leží na Thaletově kružnici nad průměrem OM'. Tato úvaha platí pro všechny body

$$A \in p \setminus \{M\}.$$

Navíc obrácením naší úvahy umíme dokázat, že každý bod kružnice nad průměrem OM' (kromě bodu O), je obrazem nějakého bodu z přímky p, tedy obrazem přímky neprocházející bodem O je kružnice procházející bodem O. Pro každou množinu bodů $\mathcal{M}$ platí

$$f(f(\mathcal{M})) = \mathcal{M}.$$

Tedy víme i to, že obrazem kružnice procházející bodem O je přímka neprocházející bodem O. Ukážeme si i analytický důkaz. Nechť p je přímka neprocházející bodem O. Soustavu souřadnic si můžeme zvolit tak, že O bude počátkem a přímka p bude kolmá na osu x. Tedy p má rovnici $x = m$ pro nějaké kladné číslo m. Místo obrazu této přímky budeme hledat její vzor v té stejné inverzi. Už dříve jsme si ukázali, že vzor množiny neobsahující bod O je obrazem té stejné množiny v dané inverzi bodů neobsahující bod O, tedy i pro naši přímku. Nechť $A' = [x', y']$ náleží p'. Bod $A = (A')'$ má souřadnice

$$\left[\frac{x' \cdot r^2}{x'^2 + y'^2}, \frac{y' \cdot r^2}{x'^2 + y'^2}\right].$$

Bod A musí ležet na přímce p, takže platí

$$\frac{x' \cdot r^2}{x'^2 + y'^2} = m.$$

Z toho po ekvivalentní úpravě dostaneme

$$\left(x' - \frac{r^2}{2m}\right)^2 + y'^2 = \left(\frac{r^2}{2m}\right)^2.$$

Jinak řečeno, bod A leží na kružnici se středem $\left[\frac{r^2}{2m}, 0\right]$ a poloměrem $\frac{r^2}{2m}$. Tato kružnice prochází bodem O.

Teď už tedy umíme zobrazit libovolnou přímku a kružnici procházející středem inverze O.

Rozmysleme si ještě na okraj, jak se chovají dvě různoběžné přímky neprocházející bodem O v zobrazení f. Jejich průsečík označme P. Obrazy těchto přímek budou kružnice. Kolik společných bodů budou mít tyto kružnice? Prvním společným bude bod O, dále bod P náleží oběma přímkám, tedy i jeho obraz náleží oběma kružnicím. Na druhou stranu, kdyby naše kružnice měly společný ještě další bod (různý od O a P), tak tento bod musí mít svůj vzor na obou přímkách. To však není možné, protože tyto přímky měly pouze jeden společný bod P. Jinak řečeno, inverze zachovává počet průsečíků (až na bod O).

Zobrazení kružnic

Speciálním případem je kružnice, která má střed v bodě O. Konkrétním příkladem je kružnice $k(O, r)$, která se zobrazí sama na sebe. Ostatní kružnice se středem O se zobrazí na větší či menší soustředné kružnice dle poloměrů zobrazované kružnice a r (poloměr kruhové inverze).

Vezměme si kružnici, která neprochází bodem O a bod O není ani jejím středem. Obrazem bude kružnice, což nyní dokážeme. Nechť je dána kružnice l se středem S. Pro jednoduchost předpokládejme, že kružnice l leží vně kružnice $k(O, r)$. Označme A, B průsečíky polopřímky OS s kružnicí l. Body A, B se zobrazí na body A', B' ležící uvnitř kružnice k. Vezměme si nějaký bod M ležící na kružnici l různý od bodů A, B. Ukážeme, že jeho obraz M' leží na Thaletově kružnici nad průměrem $A'B'$. To je ekvivalentní s tím, že úhel $B'M'A'$ je pravý. Označme velikost úhlů ABM, BAM, MOA po řadě písmeny β, α, φ. Bod M leží na kružnici nad průměrem AB, proto $\alpha + \beta = 90°$. Trojúhelníky OAM a $OM'A'$ jsou podobné (důkaz jsme uvedli při rozboru obrazu přímky), proto platí rovnost $|\measuredangle A'M'O| = |\measuredangle OAM| = 180° - \alpha$. Analogickou úvahou pro trojúhelníky OBM a $OM'B'$ dostaneme $|\measuredangle B'M'O| = |\measuredangle OBM| = \beta$. Nás však zajímá velikost úhlu $B'M'A'$ a ta je následující:

$$|B'M'A'| = (180° - \alpha) - \beta = 180° - (\alpha + \beta) = 90°.$$

Z definice inverze platí

$$|OM| \cdot |OM'| = r^2 = |OB| \cdot |OB'|.$$

Proto čtyřúhelník $B'BMM'$ je tětivový. Takže úhel $OM'B'$ má velikost β. A proto úhel $M'B'A'$ má velikost $\varphi + \beta$. Zopakováním této úvahy pro čtyřúhelník $A'AMM'$ dostaneme

$$|\measuredangle M'A'O| = |\measuredangle OMA| = \alpha - \varphi,$$

kde poslední rovnost je z trojúhelníku OAM. Nás však zajímá velikost úhlu $B'M'A'$ a ta je následující

$$|\measuredangle B'M'A'| = 180° - (\varphi + \beta) - (\alpha - \varphi) = 180° - \alpha - \beta = 90°.$$

Tato úvaha platí pro libovolný bod M. Navíc je lehké obrácením úvahy zdůvodnit, že každý bod Thaletovy kružnice nad průměrem $B'A'$ je obrazem nějakého bodu kružnice l. Dokázali jsme, že obrazem kružnice neprocházející bodem O je kružnice.

Shrnutí

Užitím předchozích poznatků a faktu, že počet společných bodů různých od bodu O zůstává zachován, můžeme sestavit následující tabulku obrazů a vzorů v inverzi podle kružnice k se středem O a poloměrem r. Jak jsme dříve uvedli, je-li útvar U obrazem vzoru V, je i V obrazem U, tabulku lze používat obousměrně.

Obraz	**Vzor**
bod X uvnitř k	bod X vně k
bod X na k	bod X na k
rovnoběžky p, q	kružnice p', q' s bodem dotyku O
ruznoběžky p, q	kružnice p', q' protínající se v O
tečna k s bodem dotyku T	kružnice nad průměrem OT
přímka p protínající k v bodech A, B, $O \notin p$	kružnice opsaná trojúhelníku ABO
kružnice l protínající k v bodech A, B, $O \notin l$	kružnice l' protínající k v bodech A, B, $O \notin l'$
kružnice m dotýkajícící se vnitřně k, $O \notin l$	kružnice m' dotýkajícící se vně k, $O \notin l$
dvojice bodů A, B	dvojice bodů A', B', $\lvert A'B'\rvert = \frac{r^2 \lvert AB\rvert}{\lvert OA\rvert \cdot \lvert OB\rvert}$

K této tabulce poznamenejme ještě dvě věci:

- Kružnice l a l' splynou, právě když je l kolmá na k – tedy když jsou spojnice bodu A se středy kružnic kolmé.
- Vzorec pro vzdálenost obrazu bodu plyne z toho, že trojúhelníky $A'B'O$ a BAO jsou podobné podle věty *sus* a to s koeficientem podobnosti $\frac{|OA'|}{|OB|} = \frac{r^2}{|OA|\cdot|OB|}$.

Nyní ke slibované konstrukci bodu. Nejprve zobrazme bod A, který je vně k. Bod A leží na přímce AO a na kružnici l nad průměrem AO. Obraz bodu A proto leží na obrazech těchto dvou útvarů. Prvním obrazem je sama přímka AO, druhým přímka l' která je společnou sečnou kružnic k a l. Stačí proto sestrojit střed S úsečky AO, kružnici $l(S, |SA|)$, průsečíky k s l vést přímku l' a bod A' najít jako průsečík l' s AO.

Při zobrazování bodu A' ležícího uvnitř k budeme postupovat obráceně: vytvoříme kolmici l' k přímce $A'O$ procházející bodem A', její prusečíky s k označíme B, C a následně opíšeme trojúhelníku OBC kružnici l. Jejím průsečíkem s $A'O$ je hledaný bod A.

Jak se sestrojují obrazy kružnic a přímek by mělo být jasné z výše uvedeného textu. Je ale třeba dát pozor na to, abychom od kruhové inverze nečekali vlastnosti, na které jsme zvyklí třeba u stejnolehlosti. Například: mějme kružnici l se středem A a její obraz l' v kruhové inverzi; obraz A' bodu A ve stejné inverzi pak **není** středem l'.

Příklady

Při řešení příkladů pomocí inverze většinou neinvertujeme podle nějaké dané kružnice, ale vybereme vhodný střed O (většinou jeden ze zadaných bodu) a libovolný poloměr k a invertujeme podle kružnice $k(O, r)$. Bod O je dobré volit tak, aby jím procházelo co nejvíce kružnic a mimo něj procházelo co nejméně přímek – v takovém případě nám inverzí kružnic ubude a přímek přibude.

Rádi bychom inverzi demonstrovali na třech příkladech. První dva z nich jsou poměrně jednoduché, a tak je možné, že najdete řešení bez inverze, které vám připadne jednodušší.

Příklad 4.1. V rovině jsou dány dvě kružnice k, l s průsečíky A, B. Vezmeme přímku p procházející bodem B, její druhý průsečík s kružnicí k označme C a její druhý průsečík s kružnicí l označme D. Dokažte, že velikost úhlu CAD nezávisí na přímce p.

Řešení. Zajímá nás velikost úhlu sevřeného přímkami AC a AD. Obě tyto přímky prochází bodem A, navíc tímto bodem prochází i obě kružnice k, l. Zobrazíme tedy celou situaci v inverzi se středem A a nějakým poloměrem r. Obrazy kružnic k, l jsou přímky k', l' s průsečíkem B'. Obrazem přímky p je kružnice p', která prochází bodem A. Tato kružnice protíná přímku k' podruhé v bodě C' a přímku l' podruhé v bodě D'. Máme tři možnosti, v jakém pořadí můžou na kružnici p' ležet tyto body: A, C', B', D' nebo A, B', C', D' a nebo A, C', D', B'. Ve všech třech případech je velikost úhlu $C'AD'$ rovna velikosti úhlu sevřeného přímkami k', l' (toho, ve kterém neleží bod A). A to je přesně to, co jsme chtěli dokázat.

Příklad 4.2. V rovině jsou dány tři shodné kružnice, které prochází společným bodem H. Označme druhé průsečíky těchto kružnic po řadě A, B, C. Dokažte, že H je ortocentrum (průsečík výšek v trojúhelníku) trojúhelníku ABC.

Řešení. Bodem H prochází tři kružnice. Proto je vhodné sestrojit inverzi se středem H, ve které se tyto kružnice zobrazí na přímky. Jak se změní dokazované tvrzení? Pokud nedokážeme toto tvrzení zformulovat pro situaci, která vznikne po zobrazení, tak jsme na nesprávné cestě. Je jasné, že stačí dokázat kolmost přímek AH a BC (stejnou úvahou získáme důkazy ostatních dvou kolmostí). Obrazem přímky AH je ona sama, obrazem přímky BC je kružnice dána obloukem $B'C'H$. Pokud jsou přímky AH a BC na sebe kolmé, tak střed kružnice $B'C'H$ leží na přímce $A'H$ (s tím jsme se střetli při důkaze toho, že přímka BC se zobrazí na kružnici). Platí to i naopak: pokud střed kružnice $B'C'H$ leží na přímce $A'H$, tak přímky AH a BC jsou na sebe kolmé.

Tvrzení úlohy neplatí bez předpokladů, že všechny kružnice mají stejný poloměr. Kružnice AHB a AHC jsou shodné právě tehdy, když jsou osově souměrné podle přímky AH. Jejich obrazem jsou přímky $A'B'$ a $A'C'$. Kruhová inverze zachovává osovou souměrnost podle osy procházející středem inverze (ověřte si to). Proto i přímky $A'B'$ a $A'C'$ jsou osově souměrné podle osy $A'H$ (využíváme, že přímka AH prochází středem inverze a je tedy samodružná). Takže úhly $C'A'H$ a $B'A'H$ mají stejnou velikost a $A'H$ je osou úhlu $C'A'B'$. Analogicky přímky $C'H$ a $B'H$ jsou osami úhlů v trojúhelníku $A'B'C'$.

Střed kružnice opsané trojúhelníku $B'C'H$ je průsečík osy úhlu $C'A'B'$ s kružnicí opsanou trojúhelníku $A'B'C'$, proto leží na přímce $A'H$. (Využili jsme tohoto tvrzení: nechť je dán trojúhelník ABC se středem vepsané kružnice I, pak osa strany AB, osa úhlu ACB a kružnice opsaná trojúhelníku ABC se protínají v jednom bodě. Tento bod, označme jej S, je střed kružnice opsané trojúhelníku ABI.[1]) Tím jsme dokázali tvrzení úlohy. Jaký byl poloměr inverze v našem řešení? Nezáleželo na něm, mohli jsme si ho zvolit libovolně.

Navíc platí, že kružnice opsaná trojúhelníku ABC je shodná s kružnicemi ze zadání.

Příklad 4.3. Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že $|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| \geq |AC| \cdot |BD|$ a rovnost nastává, právě když je $ABCD$ tětivový.

Řešení. Zde je užití kruhové inverze trochu nečekané. Za střed zvolíme bod A, za poloměr jedničku. Pro obrazy bodů B, C, D platí $|B'C'| = \frac{|BC|}{|AB||AC|}$, $|B'D'| =$

[1] Úhly SCA a SCB mají stejnou velikost. Proto i jim odpovídající tětivy SA, SB na kružnici ABC jsou stejně dlouhé. Tedy S leží na ose strany AB. Úhly AIS a IAS jsou stejně velké, proto SA je stejně dlouhé jako SI.

$\frac{|BD|}{|AB||AD|}$, $|D'C'| = \frac{|DC|}{|AD||AC|}$. Uvažme trojúhelníkovou nerovnost

$$|B'C'| + |D'C'| \geq |B'D'|$$

a dosaďme. Dostaneme

$$\frac{|BC|}{|AB||AC|} + \frac{|DC|}{|AD||AC|} \geq \frac{|BD|}{|AB||AD|},$$

což po vynásobení $|AB| \cdot |AC| \cdot |AD|$ dává dokazovanou nerovnost. Rovnost přitom nastává právě tehdy, když B', C' a D' leží na přímce v tomto pořadí, což odpovídá tomu, že body A, B, C, D leží na kružnici. Kdybychom na začátku nepředpokládali, že body A, B, C, D tvoří čtyřúhelník, mohla by rovnost nastat i v případě, kdy body A, B, C, D leží na přímce ve vhodném pořadí.

Möbiovy transformace

Tato část povídání již nemá přímou návaznost na soutěžní úlohy, uvádíme ji pouze pro zajímavost. Tento text naváže na loňskou šestou sérii, která se zabývala popisem geometrických zobrazení jako komplexních funkcí.

Jak jsme již uvedli, bod Z o souřadnicích $[x, y]$ se zobrazí v inverzi se středem $[0, 0]$ a poloměrem r na $Z' = \left[\frac{x \cdot r^2}{x^2+y^2}, \frac{y \cdot r^2}{x^2+y^2}\right]$. Kdybychom bod Z považovali za komplexní číslo $z = x + yi$, bylo by obrazem komplexní číslo

$$z' = \frac{zr^2}{x^2 + y^2} = \frac{zr^2}{|z|^2} = \frac{zr^2}{z\overline{z}} = \frac{r^2}{\overline{z}}.$$

Pokud by středem inverze bylo komplexní číslo s, bylo by $z' = s + \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{s}}$.

Shrnutím poznatku z textu k loňské šesté sérii víme, že podobná zobrazení zobrazují číslo z vždy buď na $az + b$ (přímá podobnost) nebo $a\overline{z} + b$ (nepřímá podobnost) pro nějaká komplexní čísla a, b. Snadno rozmyslíme, že složením nepřímé podobnosti a kruhové inverze dostaneme zobrazení, které posílá z na $\frac{pz+q}{rz+s}$ pro nějaká komplexní čísla p, q, r, s. Aby tento výraz měl vždy smysl, rozšíříme komplexní rovinu o „bod nekonečno“. Takovým zobrazením se říká Möbiovy transformace. Möbiovy transformace mají řadu zajímavých vlastností:

- Složení dvou Möbiových transformací je Möbiova transformace.
- Inverze k Möbiově transformaci je Möbiova transformace.
- Každá Möbiova transformace je složením nejvýše jedné kruhové inverze a podobného zobrazení.
- Pro libovolnou trojici obrazu a libovolnou trojici vzorů existuje právě jedna Möbiova transformace, která dané vzory zobrazí na dané obrazy.

Důkazy těchto tvrzení se zbývat nebudeme, dají se vyčíst na `http://en.wikipedia.org/wiki/Möbius_transformation`.

Zajímavější otázkou je, co tato tvrzení znamenají z geometrického hlediska? První tři nám říkají, že ať budeme skládat podobnosti a kruhové inverze jak chceme, vždy dostaneme zobrazení, které se dá získat složením nejvýše jedné kruhové inverze a podobného zobrazení.

Čtvrté tvrzení nám říká, že máme-li dva trojúhelníky, lze najít kružnici takovou, že obraz jednoho trojúhelníka v inverzi podle této kružnice bude podobný se druhým trojúhelníkem. Navíc pokud má jít o nepřímou podobnost, je střed této kružnice danými trojúhelníky určen jednoznačně (přímé podobnosti odpovídá střed jiný).