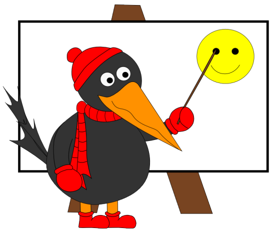
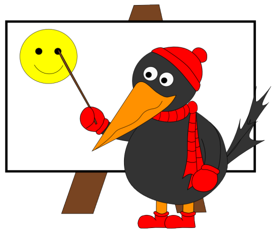


Pomocný text

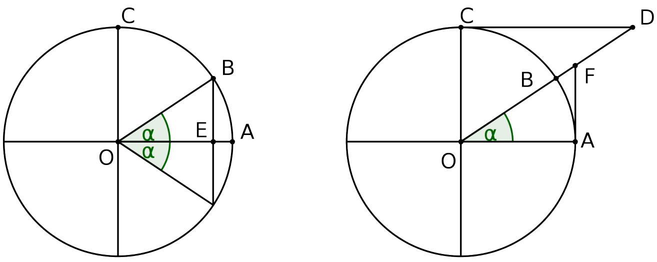
GONIOMETRIE



Důležitou oblastí goniometrie je trigonometrie, která se od euklidovské geometrie liší tím, že hledá řešení daných úloh nikoli metodou konstruktivní, ale početní. Název trigonometrie napovídá, že se tato disciplína zabývá měřením trojúhelníků, trigonometrie však obsáhne mnohem více. Zkoumá i jiné obrazce, neboť každý obrazec ohraničený úsečkami můžeme rozdělit na trojúhelníky.

K početnímu řešení trojúhelníků bylo třeba nalézt vztahy mezi prvky trojúhelníku, mezi jeho stranami a úhly. Řečtí astronomové Hipparchos a Ptolemaios, kteří používali trigonometrii ve svých astronomických výpočtech, si povšimli, že v kruhu o daném poloměru závisí délka tětivy na velikosti příslušného středového úhlu. Vzhledem k tomu, že délka tětivy záleží pouze na velikosti příslušného středového úhlu, byly trigonometrické veličiny později nazvány goniometrickými (úhloměrnými) funkcemi.

Funkce, které dnes nazýváme např. sinus nebo kosinus, Řekové neznali. Geometrický sinus úhlu α je polovina tětivy příslušné středovému úhlu 2α (úsečka BE na obrázku 3.1). Naopak úsečka OE znázorňuje kosinus úhlu α. V pravé části obrázku 3.1 je délka úsečky AF geometrickou tangentou úhlu α a CD jeho kotangentou.



Obrázek 3.1: Znázornění funkce sinus a kosinus je na levé kružnici, v pravé části se nachází tangens a kotangens.

V matematice ne vždy vystačíme pouze s úhlem, který je definován jako část roviny (hodnoty 0 až 2π, resp. $0°$ až $360°$), a proto se zavádí pojem orientovaný úhel.

Definice 3.1. *Orientovaný úhel AVB (zapisujeme $\widehat{AVB}$) je každá uspořádaná dvojice polopřímek $\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VB}$ se společným počátkem, kde $\overrightarrow{VA}$ je počáteční rameno, $\overrightarrow{VB}$ je koncové rameno a bod V je vrchol orientovaného úhlu.*

BRKOS Team 2010

Úhel vzniká otočením počátečního ramene proti směru hodinových ručiček – úhel orientován kladně, nebo otáčením počátečního ramene ve směru hodinových ručiček – úhel orientován záporně. Velikost toho z úhlů α, β, který opíše polopřímka při otočení z počátečního ramene do koncového ramene v kladném smyslu, se nazývá základní velikost orientovaného úhlu. Pro základní velikost α platí, že $0 \leq \alpha < 2\pi$, resp. $0° \leq \alpha < 360°$.

Věta 3.1. *Součtem orientovaných úhlů $\widehat{AVB}$, $\widehat{BVC}$ nazýváme úhel $\widehat{AVC}$, kde koncové rameno prvního z nich je počátečním ramenem druhého.*
Rozdílem orientovaných úhlů $\widehat{AVC}$, $\widehat{AVB}$ nazýváme úhel $\widehat{BVC}$ (v uvedeném pořadí).

Položme si jednu otázku. Jsou orientované úhly $\widehat{AVB}$ a $\widehat{BVA}$ stejné? Co myslíte? Samozřejmě, že nejsou. Pokud nevíte proč, přečtěte si tuto část povídání znovu. :)

Při měření rovinného úhlu se často používají radiány, které se označují značkou rad (většinou se ale značka neuvádí). Jeden radián je středový úhel, který přísluší oblouku o stejné délce, jako je poloměr kružnice. Je to jednotkový úhel při měření v obloukové míře. Plný úhel 360° odpovídá 2π rad. Převod mezi mírou stupňovou a obloukovou lze tedy realizovat následovně. Jestliže máme úhel x rad, je jeho velikost ve stupních $\alpha = \frac{x \cdot 180}{\pi}$. Snadno můžeme dojít k těmto rovnostem:

$$30° = \frac{\pi}{6}, \quad 45° = \frac{\pi}{4}, \quad 60° = \frac{\pi}{3}, \quad 90° = \frac{\pi}{2}, \quad 180° = \pi.$$

Věta 3.2. *Všechny goniometrické funkce jsou periodické, a to sinus a kosinus s nejmenší periodou 2π, funkce tangens a kotangens s nejmenší periodou π.*

Pro funkce tangens a kotangens platí následující vztahy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Odtud je vidět, že funkce tangens není definovaná pro hodnoty $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, a kotangens nedefinujeme pro hodnoty $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Při našich výpočtech nám mohou být užitečné vztahy mezi goniometrickými funkcemi, uvedeme zde některé z nich.

Věta 3.3. *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:*

$$\begin{aligned} &\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \\ &\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \\ &\cos^2 x + \sin^2 x = 1. \end{aligned}$$

Věta 3.4. *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí:*

$$\begin{aligned}
&\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,\\
&\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,\\
&\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2},\\
&\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2},\\
&\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2},\\
&\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}.
\end{aligned}$$

Podobné goniometrické identity si můžete odvodit pomocí komplexních čísel. Kombinací binomické věty a Moivreovy věty lze odvodit například kosinus a sinus dvojnásobného úhlu. Více o komplexních číslech se můžete dočíst v dřívějším povídání, viz `http://ganymed.math.muni.cz/brkos/files/povidani/povidani166.pdf`.

Příklad 3.1. Určete hodnotu $\cos^4 \frac{\pi}{24} - \sin^4 \frac{\pi}{24}$.

Řešení: Pomocí goniometrické jedničky, vzorce pro kosinus dvojnásobného úhlu a kosinus pro rozdíl dvou úhlů dostaneme:

$$\begin{aligned}
\cos^4 \frac{\pi}{24} - \sin^4 \frac{\pi}{24} &= \left(\cos^2 \frac{\pi}{24} + \sin^2 \frac{\pi}{24}\right) \cdot \left(\cos^2 \frac{\pi}{24} - \sin^2 \frac{\pi}{24}\right) = 1 \cdot \cos \frac{\pi}{12} =\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} =\\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.
\end{aligned}$$

Věta 3.5. *Pro všechny hodnoty $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, platí:*

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right),\\
&\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1.
\end{aligned}$$

Příklad 3.2. Dokažte, že

$$(4\cos^2 9^\circ - 3)(4\cos^2 27^\circ - 3) = \operatorname{tg} 9^\circ$$

Řešení: Nejprve si ukažme, že $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \\ &= [2\cos^2 x - 1] \cdot \cos x - [2 \sin x \cos x] \cdot \sin x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2[1 - \cos^2 x] \cos x = \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

Nyní tohoto vztahu využijeme ke zjištění, že $4\cos^2 x - 3 = \frac{\cos 3x}{\cos x}$ pro všechna $x \neq (2k+1) \cdot 90^\circ$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Pak tedy

$$(4\cos^2 9^\circ - 3)(4\cos^2 27^\circ - 3) = \frac{\cos 27^\circ}{\cos 9^\circ} \cdot \frac{\cos 81^\circ}{\cos 27^\circ} = \frac{\cos 81^\circ}{\cos 9^\circ} = \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ} = \operatorname{tg} 9^\circ.$$

Trigonometrie nám podává mnoho důležitých goniometrických identit v trojúhelníku, které pak můžeme používat při řešení různých matematických i fyzikálních úloh.

Věta 3.6. (Sinová a kosinová věta) *Pro každý trojúhelník s vnitřními úhly α, β, γ a stranami a, b, c platí:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,\\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,\\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,\end{aligned}$$

Znáte ještě další identity? Co vám říká třeba tangentová věta?