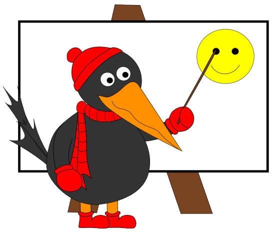
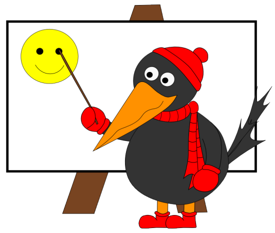


Pomocný text

NÁHODNÉ PROCHÁZKY



Spadne opilec do kanálu? Prohraje gambler výplatu? A jak to souvisí s Brownovým pohybem?

V tomto povídání se vydáme do jednoho zákoutí světa pravděpodobnosti, do kterého se běžná středoškolská matematika nepouští. K plnému pochopení budete potřebovat základní znalosti pravděpodobnosti. Intuitivně nám pravděpodobnost nějakého jevu říká, kolikrát jev nastane, budeme-li opakovat nějaký pokus. Pokusem může být například hod kostkou a jevem (nazvěme ho J) skutečnost, že padla dvojka nebo trojka. Pravděpodobnost jevu se pak spočítá jako počet příznivých výsledků (ty jsou dva) dělený počtem všech možných výsledků (těch je 6), v našem případě vyjde pravděpodobnost $P(J) = 1/3$. Jak se pravděpodobnost počítá, když je možných jevů nekonečně mnoho a další podrobnosti k samotné pravděpodobnosti najdete v loňském pomocném textu ke čtvrté sérii. Zde se omezíme na dvě tvrzení:

Věta 1. *Pro nezávislé jevy A, B platí $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*

Výraz na levé straně rovnosti značí pravděpodobnost toho, že jevy A a B nastanou zároveň. Důležité je, že tento vztah platí pouze pro nezávislé jevy – tedy takové, že pokud víme, že nastal jev A, nezískáváme žádnou novou informaci o tom, zda nastal jev B. Při házení kostkou jsou nezávislými jevy například $A =$„padlo sudé číslo“ a $B =$„padlo číslo dělitelné třemi“ (pravděpodobnost B je $1/3$ nezávisle na A). Naopak $C =$„padlo sudé číslo“ a $D =$„padlo číslo větší než 3“ jsou závislé, protože pravděpodobnost $P(D) = 1/2$, ale za předpokladu, že nastalo C, je D splněno pro 4 a 6 a nesplněno pouze pro 2, proto je pravděpodobnost D za podmínky C (značíme $P(D|C)$) rovna $2/3$).

Věta 2. *Pro neslučitelné jevy A, B platí $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*

Řečeno neformálně, pokud jevy A a B nemohou nastat současně, je pravděpodobnost, že nastal alespoň jeden z nich, rovna součtu jejich pravděpodobností.

Náhodné veličiny

Náhodná veličina je funkcí výsledku náhodného pokusu – určité množině výsledků náhodného pokusu přiřadíme nějakou hodnotu. Náhodné veličiny značíme velkými písmeny z konce abecedy. U házení kostkou je takovou veličinou například počet ok, který padl. Pravděpodobnost, že je veličina X rovna hodnotě x_0 značíme $P(X = x_0)$. Pravděpodobnostem jednotlivých hodnot říkáme *pravděpodobnostní rozložení*. Pro hod jednou kostkou jsou pravděpodobnosti všech výstupů stejné, takovému rozložení se říká rovnoměrné. Pokud budeme házet dvěma kostkami nezávisle a padlé počty ok označíme na jednotlivých kostkách označíme X a Y, je $X+Y$ náhodná veličina s následujícím náhodným rozložením

t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X+Y=t)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Zamysleme se nyní nad tím, jaké rozložení má součet veličin X_1, X_2,..., X_n, z nichž každá nabývá hodnoty 1 s pravděpodobností p a hodnoty 0 s pravděpodobností $1-p$. Zřejmě je tento součet celým číslem z intervalu $\langle 0, n\rangle$. Aby byl roven k, muselo by právě k z těchto n veličin být nenulových. Jeden Veličiny, které mají být nenulové, lze vybrat $\binom{n}{k}$ způsoby

Střední hodnotu veličiny X značíme $E(X)$ a počítáme ji jako

$$x_1P(X=x_1)+x_2P(X=x_2)+\cdots+x_nP(X=x_n),$$

kde $x_1,\ldots,x_n$ jsou všechny hodnoty, které může X nabývat. Pro počet ok na kostce je tato střední hodnota rovna $\frac{1}{6}1+\frac{1}{6}2+\cdots+\frac{1}{6}6=\frac{7}{2}$. Střední hodnota nám udává v jistém smyslu nejpravděpodobnější hodnotu dané veličiny. Pro střední hodnotu dvou náhodných veličin platí $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

Náhodné procesy

Náhodný proces je tvořen náhodnými veličinami, z nichž každá popisuje nějakou vlastnost systému v nějakém čase. My se omezíme na procesy diskrétní, v nichž jsou tyto veličiny X_1, X_2, ... Takový proces se nazývá náhodná procházka, pokud veličina X_i popisuje polohu nějakého objektu, a to zpravidla v grafu, na přímce, v ploše nebo v prostoru. Lze uvažovat celou řadu náhodných procházek, my se omezíme na ty, kde pro všechna přirozená i závisí pravděpodobnostní rozložení X_{i+1} pouze na X_i[1].

Procházka po přímce

Konečně se dostáváme k tomu gamblerovi z úvodního řádku. Řekněme, že sedí u rulety a sází stále dolar na červenou. Protože jde o Evropskou ruletu, na které je 18 čísel černých, 18 červených a zelená nula[2], gambler s pravděpodobností $q=19/37$ svůj dolar prohraje, s pravděpodobností $p=18/37$ dolar získá. Stavem procesu (gamblera) v čase t je částka X_t, kterou má u sebe. Tu si můžeme představit jako bod na číselné ose, který se s příslušnými pravděpodobnostmi pohybuje doleva nebo doprava.

Budeme se zabývat tím, jak se mění pravděpodobnostní rozložení X_t v závislosti na t. Je třeba si uvědomit, že každé kolo rulety je jedním nezávislým pokusem,

[1] Procesy s touto vlastností se obecně nazývají Markovovy. Více o nich třeba na stránkách doktora Jana Boudy `http://www.fi.muni.cz/~xbouda1/teaching/2009/IV111/`

[2] V americké ruletě jsou nuly dvě.

který s pravděpodobností p vyjde. Počet úspěšných pokusů mezi prvními t pokusy (označme ho U_t) má binomické rozdělení

$$P(U_t = k) = \binom{t}{k} p^k q^{t-k}.$$

Pokud gambler začínal na částce z, v případě k úspěchů a $t-k$ neúspěchů bude mít částku $z + 2k - t$, tedy

$$P(X_t = z + 2k - t) = \binom{t}{k} p^k q^{t-k} = \binom{t}{k} (\frac{p}{q})^k q^t.$$

Když položíme $r = z + 2k - t$, máme $k = \frac{r+t-z}{2}$

$$P(X_t = r) = \binom{t}{\frac{r+t-z}{2}} (\frac{p}{q})^{\frac{r+t-z}{2}} q^t.$$

Pokud vám přijde divné, že je v kombinačním čísle zlomek, který je pro některá r neceločíselný, je třeba si uvědomit, že částka, kterou má gambler u sebe se s každým tahem mění ze sudé na lichou a naopak – pokud je t sudé, má vzorec význam jen pro ta r, která mají stejnou paritu jako z, pro t liché je tomu přesně naopak.

Dosud jsme se zabývali případem, kdy může gambler získat libovolně mnoho nebo libovolně málo peněz. Pokud bychom přidali omezení, že končí hru, pokud spadne na nulu nebo dosáhne cílové částky c, nebudou výše uvedené vzorce platit. Najít vzorec pro jeho okamžité jmění bude nemožné. Z hlediska gamblera jsou ale zajímavé jiné dvě otázky: jaká je pravděpodobnost, že prohraje dříve,než dosáhne cílovou částku a jaká je očekávaná doba hry. Zkusme zodpovědět první otázku. Označme u_z pravděpodobnost, že vyhraje částku c, pokud začínal na částce z. Všimneme si, že $u_0 = 0$, $u_c = 1$ a pro všechna i mezi 0 a c platí $u_i = pu_{i+1} + qu_{i-1}$ (když mám i dolarů, můžu buď bezprostředně jeden vyhrát a pak se z částky $i+1$ probojovat s pravděpodobností u_{i+1} k částce c, nebo začnu prohrou jednoho dolaru a pak se probojovávám z částky $i-1$ – tyto dvě možnosti je třeba sečíst.) Protože $p + q = 1$, lze psát

$$\begin{aligned} (p+q)u_i &= pu_{i+1} + qu_{i-1} \\ q(u_i - u_{i-1}) &= p(u_{i+1} - u_i). \end{aligned}$$

Pokud položíme $\delta_i = u_i - u_{i-1}$, máme po dosazení a vydělení p rovnost $\delta_{i+1} = \frac{q}{p} u_{i-1}$. Hodnoty δ_i proto tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $\frac{p}{q}$, součet jejích prvků δ_1 až δ_c je dle vzorce

$$\delta_1 \cdot \frac{1 - (\frac{q}{p})^c}{1 - \frac{q}{p}}.$$

Tednto součet rozdílů je ale $u_c - u_0 = 1$. Máme tak rovnici, z níž lze δ_1 vyjádřit pomocí p a q. Hodnota u_i je rovna součtu hodnot δ_1 až δ_i, lze ji tedy vypočíst ze vzorce pro součet geometrické posloupnosti

$$u_z = \frac{(\frac{q}{p})^c - (\frac{q}{p})^z}{(\frac{q}{p})^c - 1}.$$

BRKOS Team 2010

Pokud jde o očekávaný počet tahů, v nichž hra skončí, postupujeme obdobně: tuto hodnotu pro počáteční částku z označíme d_z a máme $d_0 = 0$, $d_c = 0$ a $d_c = 1 + pd_{c+1} + qd_{c-1}$. S touto rekurentní rovnicí si můžeme hrát podobně, jako v minulém případě, a dojít k ještě komplikovanějšímu výsledku:

$$d_z = \frac{1}{q-p} - \frac{c}{q-p} = \frac{(\frac{q}{p})^z - 1}{(\frac{q}{p})^c - 1}.$$

Procházka v rovině

Mějme opilce, který chodí po čtvercové síti a začíná v bodě $(0,0)$. V každém okamžiku udělá s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ krok nahoru, se stejnou pravděpodobností může udělat kroky dolů, doleva a doprava. Můžeme si uvědomit, že součet souřadnic, na kterých se nachází, se takto s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ o 1 zvětší a se stejnou pravděpodobností o 1 zmenší. To samé lze říct o rozdílu souřadnic. Navíc se obě veličiny mění nezávisle. Označíme-li X_t x-ovou a Y_t y-ovou souřadnici opilce v čase t, platí

$$P(X_t = x \wedge Y_t = y) = \frac{\binom{t}{\frac{t+x+y}{2}}}{\binom{t}{\frac{t+x-y}{2}}} 4^t.$$

Delší pojednání o tomto problému najdete v desátém ročníku časopisu M&M (`http://jdem.cz/f9j93`).

Rozšíření z roviny do prostoru nelze jednoduše provést. V prostoru mají dokonce náhodné procházky jiné kvalitativní vlastnosti – například pravděpodobnost, že se nejpozději v t krocích vrátíme tam, odkus jsme vyšli, se v dvojrozměrném případě s rostoucím t blíží jedničce, ve třech rozměrech toto číslo nikdy nepřesáhne jednu třetinu.

Procházka po grafu

Slovo graf má v matematice dvě využití. Pokud se bavíme o náhodných procházkách, zajímá nás graf jako množina vrcholů (bodů), přičemž některé dvojice vrcholů jsou spojeny hranami. Pro každý vrchol a každou hranu z něj jsou určeny pravděpodobnosti, že z něj náhodně se procházející člověk půjde z daného vrcholu právě po této hraně. Dá se dokázat, že pokud není v grafu vrchol, z nějž by bylo možné se vrátit do něj samého jen v určitých periodách, blíží se pravděpodobnost výskytu bloudícího člověka v nějakém vrcholu od určitého okamžiku nějaké limitě. Pokud navíc z každého vrcholu lze dojít do každého vrcholu, lze tuto limitu získat jednoduchým algoritmem. Pokud do vrcholu v_1 lze přejít z vrcholů v_1, $v_2 \dots v_k$ s pravděpodobnostmi $p_1, \dots p_k$, můžeme psát

$$l_1 = p_1 l_1 + \cdots + p_k l_k,$$

kde l_i značí hledanou limitní pravděpodobnost pro i-tý vrchol. Takto dostaneme soustavu lineárních rovnic, jejímž řešením je hledaná posloupnost pravděpodobností.

BRKOS Team 2010