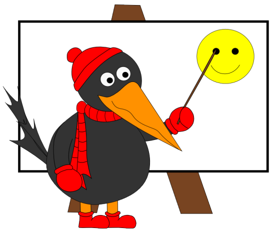
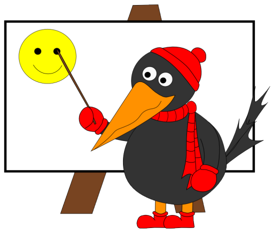


Pomocný text

Afinní roviny



Jedním z nejpopulárnějších hlavolamů dnešní doby je sudoku. Kouká na nás z většiny novin většinou hned vedle švédské křížovky. Matematika by ale nebyla matematikou, aby i tuto hádanku nepojmenovala a nepodrobila pořádnému zkoumání. Dnešní sudoku je variantou tzv. *latinského čtverce*. Těm se bude věnovat část našeho povídání.

Definice 1. *Latinský čtverec řádu n je čtvercové schéma $n \times n$ čísel mezi 1 a n takové, že každý řádek a každý sloupec obsahuje všechna čísla od 1 do n.*

To znamená, že všechna čísla v libovolném řádku jsou různá; totéž platí o sloupcích. Takovým latinským čtvercem řádu 9 může tedy opravdu být dobře vyřešené sudoku. Obecně vypadá latinský čtverec následovně

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Protože tenhle zápis je prostorově náročný, často používáme jen symbolický zápis $L = (a_{ij})$, kde i je index řádku a j index sloupce.

Definice 2. *Dva latinské čtverce řádu n $L_1 = (a_{ij})$ a $L_2 = (b_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ nazveme ortogonální, jestliže pro každou dvojici čísel $(a, b), 1 \leq a, b \leq n$, existují i, j takové, že $a_{ij} = a, b_{ij} = b$.*

Jinými slovy, pro každou dvojici čísel (a, b), a i b jsou mezi 1 a n, najdeme pozici takovou, že první čtverec má na této pozici číslo a a druhý číslo b.

Úloha 1. *Udejte příklad ortogonálních i neortogonálních čtverců.*

Řešení 1. *Ortogonálními čtverci řádu 3 jsou například*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad a \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

BRKOS Team 2010

Opravdu tomu tak je, protože pokud oba čtverce překryjeme, dostaneme schéma

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (2,2) & (3,3) \\ (2,3) & (3,1) & (1,2) \\ (3,2) & (1,3) & (2,1) \end{pmatrix}$$

a každá dvojice sestavená z čísel $1, 2, 3$ *se v něm vyskytuje právě jedenkrát.*

Oproti tomu čtverce

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ a \ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ortogonální nejsou. Při překrytí dostaneme

$$\begin{pmatrix} (1,2) & (2,1) \\ (2,1) & (1,2) \end{pmatrix}$$

a například dvojici $(1, 1)$ *tu nenajdeme. Na závěr příkladu poznamenejme, že ortogonální čtverce existují pro všechny řády kromě dvojky a šestky.*

V další části našeho povídání se budeme věnovat konečným afinním rovinám.

Definice 3. *Buď* A *konečná neprázdná množina,* $\mathcal{R}$ *nějaký systém jejích neprázdných podmnožin. Prvky množiny* A *nazýváme body, prvky systému* $\mathcal{R}$ *přímky. Dvojici* $(A, \mathcal{R})$ *nazveme konečnou afinní rovinou, jestliže platí:*

1. *Každé dva různé body leží na právě jedné přímce.*
2. *Ke každému bodu* $x \in A$ *a každé přímce* $p \in \mathcal{R}$ *takové, že* $x \notin p$, *existuje právě jedna přímka* q *taková, že* $x \in q$, $p \cap q = \emptyset$.
3. *Existují tři navzájem různé body, které neleží na jedné přímce.*

Všimněme si, že konečná afinní rovina je postavená na konečné množině. Řádem konečné afinní roviny budeme rozumět přirozené číslo, jehož druhá mocnina je počet prvků množiny A. To, že pro každou konečnou afinní rovinu takové číslo existuje, dokazovat v našem povídání nebudeme. Je to ponecháno laskavému čtenáři jako čtvrtá úloha této série :-)

Dále si všimněme, že název konečná afinní rovina není tak úplně od věci. Tato struktura se opravdu podobá nám dobře známé nekonečné rovině. Druhá podmínka nám například říká, že k dané přímce lze bodem, který na ní neleží, vést právě jednu rovnoběžku. Pro lepší představu se podívejme, jak taková konečná afinní rovina vypadá.

Uvažme jako A množinu obsahující čísla $0, \dots, 15$. Tedy naše rovina má řád 4. Pro přehlednost ji znázorníme tabulkou:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Jak vypadají přímky v takové rovině? V prvním směru jsou to

$$r_1 = \{0, 1, 2, 3\}, r_2 = \{4, 5, 6, 7\}, r_3 = \{8, 9, 10, 11\}, r_4 = \{12, 13, 14, 15\},$$

ve druhém

$$r_5 = \{0, 4, 8, 12\}, r_6 = \{1, 5, 9, 13\}, r_7 = \{2, 6, 10, 14\}, r_8 = \{3, 7, 11, 15\},$$

ve třetím

$$r_9 = \{0, 5, 10, 15\}, r_{10} = \{1, 4, 11, 14\}, r_{11} = \{2, 7, 8, 13\}, r_{12} = \{3, 6, 9, 12\},$$

ve čtvrtém

$$r_{13} = \{0, 6, 11, 13\}, r_{14} = \{1, 7, 10, 12\}, r_{15} = \{2, 4, 9, 15\}, r_{16} = \{3, 5, 8, 14\}$$

a v posledním

$$r_{17} = \{0, 7, 9, 14\}, r_{18} = \{1, 6, 8, 15\}, r_{19} = \{2, 5, 11, 12\}, r_{20} = \{3, 4, 10, 13\}.$$

Například body $5, 8$ spojuje přímka $r_{16} = \{3, 5, 8, 14\}$. Jiná přímka dvojici $5, 8$ jako svoji podmnožinu neobsahuje. Bodem 11 povedeme k této přímce rovnoběžku. Tímto bodem procházejí přímky $r_3, r_8, r_{10}, r_{13}, r_{19}$. Z těchto pěti přímek má pouze r_{13} s r_{16} prázdný průnik a právě ona je hledanou rovnoběžkou.

Může se zdát, že konečné afinní roviny s latinskými čtverci moc nesouvisí. Dá se ale dokázat, že konečná afinní rovina řádu $n \geq 3$ existuje právě tehdy, když existuje $n - 1$ latinských čtverců n-tého řádu, z nichž každé dva jsou navzájem ortogonální. Jako důsledek tohoto tvrzení dostáváme, že neexistuje konečná afinní rovina řádu 6.

BRKOS Team 2010