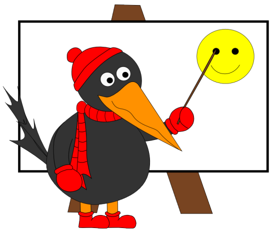
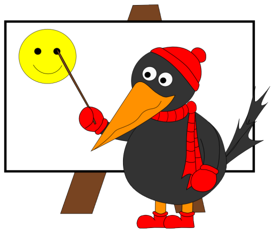


Pomocný text

Komplexní čísla



Minulá série byla o polynomech, část povídání jsme věnovali hledání kořenů. Zjistili jsme, že existují nekonstantní polynomy, které v reálných číslech kořen nemají. Slíbili jsme, že ukážeme, jak množinu reálných čísel rozšířit tak, aby každý nekonstantní polynom s reálnými koeficienty měl alespoň jeden kořen.

Vybereme si nejjednodušší z polynomů, které nemají reálný kořen, a to $x^2 + 1$. Nyní prohlásíme, že i je kořenem tohoto polynomu. Abychom mohli s i pracovat, potřebujeme, aby pro něj byly definované běžné operace. Výsledek násobení i reálným číslem y zapíšeme jako yi a nazveme ryze imaginárním číslem. Výsledek sčítání ryze imaginárního yi a reálného x zapíšeme jako $x + yi$ a nazveme ho číslem komplexním, x nazveme jeho reálnou složkou (značíme $\Re(x)$) a y složkou imaginární $\Im(x)$. Čísla s nulovou imaginární složkou jsou reálná, ostatní čísla jsou imaginární.

Dále potřebujeme definovat, jak budeme sčítat a násobit takto vzniklá čísla. Pro $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ položíme

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i, \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 y_1 - x_2 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i. \end{aligned}$$

Definice sčítání je intuitivní, co se týče násobení, stačí si uvědomit, že přesně takový výraz dostaneme roznásobením závorek $(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i)$ s využitím faktu, že $i^2 + 1 = 0$, tedy $i^2 = -1$. Dělení čísel $\frac{a+bi}{c+di}$ provádíme tak, že čitatele rozšíříme číslem sdruženým, dostáváme tak $\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$, čitatele můžeme roznásobit výše popsaným způsobem.

Věta 1 (Základní věta algebry)**.** *Polynom s komplexními koeficienty stupně alespoň 1 má v oboru komplexních čísel kořen.*

Tuto větu ponecháme bez důkazu, neboť ten by si vyžádal několik stran teorie.

Gaussova rovina

Protože jsou komplexní čísla vlastně dvojicemi čísel reálných, můžeme si je představit jako body v rovině, jejichž x-ová souřadnice je rovna reálné a y-ová souřadnice imaginární složce. Pro číslo $z = x + yi$ pak lze definovat následující tři operace:

- *komplexně sdružené číslo* vznikne z čísla z překlopením podle reálné osy, je dáno vztahem $\overline{z} = x - yi$.

- *Absolutní hodnota* udává vzdálenost čísla z od 0, dle Pythagorovy věty ji spočteme jako $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Všimneme si, že pro $y = 0$ máme absolutní hodnotu reálného čísla, kterou známe.
- *Argument* udává úhel mezi spojnicí čísla z s nulou a kladnou poloosou reálné osy. Kladná reálná čísla mají argument 0, záporná π[1].

Můžeme odvodit zajímavé vlastnosti komplexních čísel:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}, \tag{5.1}$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \tag{5.2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \tag{5.3}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \tag{5.4}$$

První tři vztahy lze snadno dokázat z definice násobení a sčítání komplexních čísel, (5.4) získáme tak, že absolutní hodnoty rozepíšeme pomocí (5.1). Ze vztahů (5.2) a (5.3) lze odvodit následující větu:

Věta 2. *Nechť P je polynom s komplexními koeficienty a $\overline{P}$ je polynom, který z něj vznikne záměnou koeficientů za čísla sdružená. Pak platí $\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z})$.*

Důležitý je zejména důsledek této věty, a to, že pokud má P reálné koeficienty a z je jeho kořen, pak je i $\overline{z}$ jeho kořen. S kořenovým činitelem $(x - z)$ má proto polynom P i kořenový činitel $(x - \overline{z})$, a je proto dělitelný jejich součinem, který je roven $(x^2 - 2Re(z) - |z|^2)$. Spolu se základní větou algebry tak dostáváme výsledek, který jsme bez důkazu zmiňovali minule, a to, že každý polynom s reálnými koeficienty lze nad reálnými čísly rozložit na součin polynomů nejvýše druhého stupně.

Důvodem, proč se zavádí argument, je usnadnění násobení komplexních čísel. Komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je u a argument φ lze zapsat jako $|u| \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Takovému zápisu říkáme *goniometrický tvar*, zápis tvaru $a + bi$ nazýváme tvarem *algebraickým*. Pokud je $|u| = 1$, nazýváme u komplexní jednotkou.

Když pak násobíme dvě čísla v takovém tvaru, dostaneme

$$\begin{aligned}
&|u|\cdot(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \cdot |v| \cdot (\cos(\psi) + i\sin(\psi)) = \\
&\quad = |u| \cdot |v| \cdot (\cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi) + i(\sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\psi)\sin(\varphi))) = \\
&\quad = |u| \cdot |v| \cdot (\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)).
\end{aligned}$$

V poslední úpravě jsme použili součtové vzorce pro sinus a cosinus, které se dají odvodit geometricky nebo najít v tabulkách. Ukázali jsme tak, že $\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)$, což nám spolu s rovností (5.4) dává jednoduchý způsob, jak násobit komplexní čísla. Často se goniometrické funkce sinus a cosinus definují pomocí komplexních čísel, vztah pro argumenty se odvodí geometricky a součtové vzorce se prohlásí za důsledek.

[1] Argument se určuje v radiánech, π radiánů je 180°, jednotka rad se nepíše.

Moivreova věta

Protože se při násobení argumenty sčítají, při umocnění na n-tou se násobí číslem n. Ačkoliv je to triviální důsledek předchozích úvah, má tato věta velký význam.

Věta 3 (Abraham de Moivre). *Nechť* $z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. *Pak pro každé přirozené* n *platí* $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$.

Tato věta nám umožňuje například řešit takzvané binomické rovnice, tedy rovnice tvaru

$$z^n = t,$$

kde z je neznámá a t parametr. Po přepsání do goniometrického tvaru máme

$$|z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = |t|(\cos(\psi) + i\sin(\psi)).$$

Z rovnosti absolutních hodnot plyne $|z| = \sqrt[n]{|t|}$, z rovnosti reálných částí pak $\cos(n\phi) = \cos(\psi)$, proto $n\phi = \psi + 2k\pi$, $\phi = \frac{\psi}{n} + \frac{2k}{n}\pi$. Všechna řešení této rovnice proto tvoří množinu

$$\left\{ \sqrt[n]{|t|} \left(\cos\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2k}{n}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2k}{n}\pi\right)\right) \mid k \in \{0, \ldots, n-1\} \right\}.$$

Hodnotu k uvažujeme pouze v daném intervalu proto, že zvětšením argumentu o 2π se hodnota čísla nezmění. Řešení této rovnice tvoří vrcholy n-úhelníka vepsaného do kružnice o poloměru $[n]\sqrt{|t|}$ se středem v bodě 0.

Počítat n-tou odmocninu z t v komplexním oboru znamená řešit binomickou rovnici $z^n = t$, která má n řešení. V komplexním oboru proto odmocnina není funkcí, ale relací.

Lze dodefinovat umocnění komplexního čísla na libovolné komplexní číslo, a to pomocí vztahu z Moivreovy věty (zrušíme předpoklad, že n musí být přirozené).

Zjednodušit goniometrický tvar lze pomocí vztahu mezi základem přirozeného logaritmu e, Ludolfovým číslem π a imaginární jednotkou i nalezeného Leonhardem Eulerem:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Když si rozepíšeme (-1) do goniometrického tvaru, máme odtud $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$, umocněním na $\frac{\varphi}{\pi}$ dostáváme $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$. Číslo $|z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ lze proto zapsat v tzv. *exponenciálním tvaru* $|z|e^{i\varphi}$.

Komplexní čísla v geometrii

Stejně jako nám v předchozích úvahách pomohlo uvažovat komplexní číslo jako bod v rovině, lze k řešení mnoha úloh v geometrii využít opačného převodu. Podobná zobrazení pak odpovídají operacím s komplexními čísly. Posunutí je přičtení komplexního čísla, otočení kolem počátku o úhel α je násobení komplexní jednotkou $e^{i\alpha}$, stejnolehlost se středem v počátku je násobení koeficientem stejnolehlosti, osová souměrnost podle osy x odpovídá komplexnímu sdružení. Jakékoliv další podobné zobrazení získáme jejich složením. Například otočení okolo bodu s o úhel α odpovídá posunutí o $-s$, otočení $e^{i\alpha}$ a zpětnému posunutí o s, tedy $r(z) = e^{i\alpha}(z - s) + s = e^{i\alpha}z + (1 - e^{i\alpha})s$. Analogicky stejnolehlost se středem s a koeficientem λ je dána vztahem $h(z) = \lambda z + (1 - \lambda)s$. Protože každá přímá podobnost je složením otočení, stejnolehlosti a posunutí, lze každou přímou podobnost zapsat jako $f(z) = uz + v$, kde u, v jsou komplexní čísla. Každá nepřímá shodnost je složením souměrnosti podle osy x a nějaké přímé shodnosti, lze ji vždy zapsat vztahem $f(z) = u\overline{z} + v$. V obou případech je koeficientem podobnosti $|u|$. Jde proto o shodnost, právě když $|u| = 1$.

Komplexní čísla je dobré vnímat nejen jako body, ale i jako úsečky spojující daný bod s počátkem. Pokud dvě takové úsečky svírají úhel α, znamená to, že podíl odpovídajících čísel má argument α. Komplexní čísla ve tvaru $z_1 - z_2$ lze brát také jako spojnici bodů z_2, z_1.

Příklad 1. *Jsou dány rovnostranné trojúhelníky ABC a DEF tak, že jsou oba popsány ve smyslu chodu hodinových ručiček. Dokažte, že trojúhelník KLM, kde K, L a M jsou po řadě středy stran AD, BE a CF, je také rovnostranný.*

U této úlohy jsme loni ve vzorovém řešení hledali podobné trojúhelníky. Existuje však i jednodušší způsob, a to pomocí komplexních čísel. Malými písmeny budeme značit komplexní čísla odpovídající vrcholům trojúhelníka. Protože jsou ABC a DEF podobné, existují komplexní čísla u, v taková, že $d = au + v$, $e = bu + v$, $f = cu + v$. Středy úseček pak jsou $k = \frac{1}{2}(a + au + v) = \frac{u+1}{2}a + \frac{v}{2}$, $l = \frac{u+1}{2}b + \frac{v}{2}$, $m = \frac{u+1}{2}c + \frac{v}{2}$. Trojúhelník KLM je proto podobný s trojúhelníkem ABC a je rovnostranný.

Příklad 2. *Je dán libovolný trojúhelník ABC. Každou jeho stranu roztřetíme a nad prostřední třetinou zkonstruujeme rovnostranný trojúhelník tak, aby nově vzniklý vrchol ležel vně ABC. Nově vzniklé vrcholy nad stranami BC, AC a AB označme po řadě K, L a M. Dokažte, že je KLM rovnostranný.*

Tato úloha je známá jako Napoleonův trojúhelník. Při stejné konvenci jako v předchozím příkladě zkusme vyjádřit vektor KL (tzn. komplexní číslo $l-k$) pomocí a, b, c. Pro pohodlnost umístěme trojúhelník tak, aby platilo $a = 0$. Bod ležící ve třetině AC blíže k A označme D. Trojúhelník ADL je rovnoramenný, při hlavním vrcholu má úhel $\frac{2\pi}{3}$, při zbylých vrcholech $\frac{\pi}{6}$. Jeho strana AK má délku $\sqrt{3}|AD| = \frac{\sqrt{3}}{3}|AC|$. Položíme-li $r = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\pi/6} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}$. Platí tak $l = cr$. Analogicky $m = b\overline{r}$ a $k = c + (b - c)r = b + c(1 - r) = b + c\overline{r}$. Proto $l - m = cr - b\overline{r}$, $l - k = c(r - \overline{r} - r) - br$. Přitom čísla $\overline{r}$, r a $\overline{r} - r$ v rovině představují vektory, které tvoří rovnostranný trojúhelník. Platí proto $r = e^{i\pi/3}\overline{r}$, $r - \overline{r} = e^{i\pi/3}r$. Užitím těchto dvou rovností máme $l - k = e^{i\pi/3}(l - m)$, úsečka KL je proto otočením KM o $\frac{\pi}{3}$, což jsme chtěli dokázat.