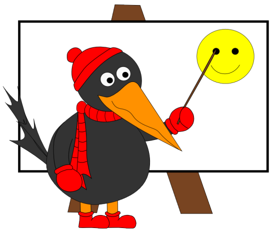
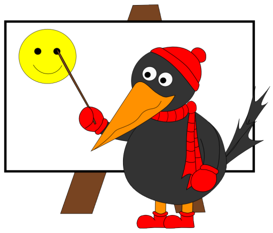


Pomocný text

Geometrická pravděpodobnost



Než se pustíme do pravděpodobnosti geometrické, připomeneme, co je to pravděpodobnost klasická. K její definici budeme potřebovat nějaké *jevové pole* (značíme ho Ω). Je to konečná množina všech výsledků, které může mít nějaký pokus a z nichž každý je stejně možný, například množina čísel, které mohou padnout na kostce, množina posloupností čísel, které mohou být vylosovány ve Sportce apod. Pojem *pokus* není nijak vymezen, jevovým polem proto může být libovolná konečná množina. Její prvky budeme nazývat *elementární jevy*, její podmnožiny *jevy*.

Definice 1. *Pravděpodobností jevu A (značíme $P(A)$) rozumíme hodnotu podílu $\frac{|A|}{|\Omega|}$, kde $|X|$ značí počet prvků množiny X.*

Příklad 1. *Jaká je pravděpodobnost, že na klasické kostce padne liché číslo?*

Zde je jevovým polem množina $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, příznivým jevem je $A = \{1, 3, 5\}$. Pravděpodobnost tohoto jevu určíme jako $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Vždy, když spočítáme nějakou pravděpodobnost, je dobré ověřit, že výsledek leží v intervalu $\langle 0, 1\rangle$. V opačném případě je někde vážná chyba.

Geometrickou pravděpodobnost využijeme tam, kde má pokus nekonečně mnoho stejně možných výsledků, z nichž každému lze přiřadit k-tici reálných čísel tak, že i-té číslo je z intervalu (a_i, b_i), a pravděpodobnost, že padne do intervalu (c_i, d_i) je $\frac{d_i - c_i}{b_i - a_i}$ nezávislé na hodnotách ostatních čísel.

Označení zůstane stejné, jako u klasické pravděpodobnosti, zůstane zachován i vztah $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. V tomto případě už ale nemůžeme určovat $|\Omega|$ ani $|A|$ jako počty prvků, ale jako *míru* množiny. Co to je míra? Protože elementární jevy odpovídají k-ticím reálných čísel, můžeme si je představit jako body v k-rozměrném prostoru (pro $k = 1$ body na přímce, pro $k = 2$ body v rovině, ...). Podle hodnoty k jsou Ω a A sjednoceními několika úseček, rovinných obrazců, nebo obecně k-rozměrných těles. Pro takové útvary jsme již míru všichni mnohokrát počítali, akorát pod názvy jako „délka“ pro úsečky, „obsah“ pro rovinné obrazce a „objem“ pro tělesa. Důležité je porovnávat míry stejného rozměru – pokud je např. Ω krychle a A bod.

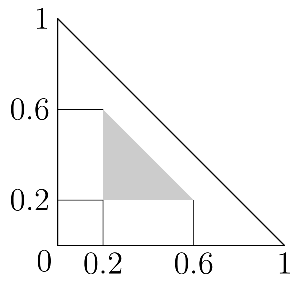
Příklad 2. *Náhodně vybereme číslo x z intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Jaká je pravděpodobnost, že bude $16x^2 + 3 \geq 16x$?*

Řešením nerovnice dostáváme $A = \langle 0, \frac{1}{4}\rangle \cup \langle \frac{3}{4}, 2\rangle$. Míra této množiny je součtem délek intervalů $\langle 0, \frac{1}{4}\rangle$ a $\langle \frac{3}{4}, 2\rangle$, je proto rovna $\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3}{2}$. Přitom $|\Omega| = 2$, proto $P(A) = \frac{3}{4}$.

BRKOS Team 2009

Příklad 3. *Tyč délky 1 m rozdělíme dvěma náhodně umístěnými řezy na tři části. Jaká je pravděpodobnost, že všechny tři části budou mít délku alespoň 20 cm?*

Každému rozdělení přiřadíme dvojici reálných čísel (x, y), kde x je délka první a y délka druhé části v metrech. Každá taková dvojice bude splňovat $x, y > 0$ a $x + y > 0$. Máme tak tři omezení, každé určuje nějakou polorovinu. Jevové pole Ω leží v průniku těchto polorovin, kterým je trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(0, 1)$ a $(1, 0)$. Na druhou stranu každé dvojici (x, y), která vyhoví všem nerovnostem, odpovídá nějaké rozdělení tyče. Množinou Ω je proto celý trojúhelník. Prvek množiny A musí splnit $x, y \geq 0,2$ a $1 - x - y \geq 0,2$. Těmto třem nerovnostem odpovídají všechny body trojúhelníka s vrcholy $(0,2; 0,2)$, $(0,2; 0,6)$, $(0,6; 0,2)$. Snadno nahlédneme, že každý bod tohoto trojúhelníka opravdu vyhoví daným podmínkám. Hledaná pravděpodobnost je poměrem obsahů trojúhelníků, $P(A) = \frac{0{,}08}{0{,}5} = 0,16$.



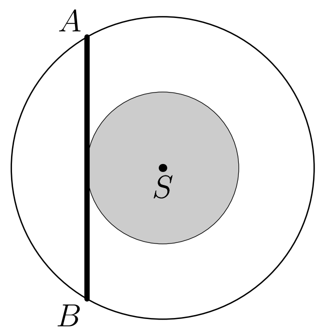
Zatím jsme pracovali s poměrně vágním předpokladem, že každý výsledek je stejně možný. Protože je možných výsledků nekonečně mnoho, plyne odtud, že každý konkrétní výsledek má nulovou pravděpodobnost. My musíme tedy předpoklad zesílit: každé dvě množiny výsledků, které mají stejnou míru, jsou stejně možné. Způsobů, jak úlohu převést na problém s k-ticemi reálných čísel je mnoho, ale ne všechny vyhoví podmínce.

Tuto skutečnost si nyní představíme na příkladu, který je znám jako Bertrandův paradox.

Příklad 4. *Zvolme na kružnici se středem S a poloměrem 1 náhodně dva body A, B. Jaká je pravděpodobnost, že jsou to koncové body tětivy, která má délku větší než $\sqrt{3}$?*

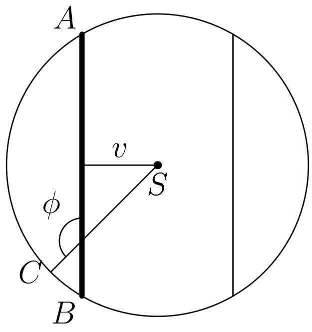
Tato úloha se nazývá Bertrandův paradox. Bertrandův proto, že ji vymyslel Joseph Bertrand v roce 1888 a paradox proto, že navrhl tři zdánlivě správná řešení.

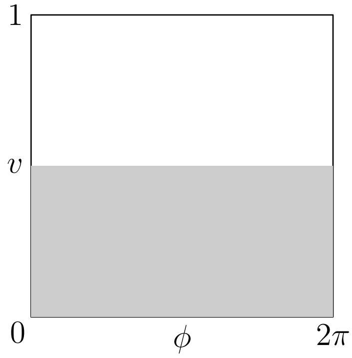
V prvním řešení popíšeme tětivu AB souřadnicemi jejího středu vzhledem k pevně zvolené pravoúhlé soustavě souřadnic. Množinu možných středů tvoří kruh o poloměru 1. Tětiva délky $\sqrt{3}$ je stranou rovnostranného trojúhelníka vepsaného do jednotkové kružnice a její vzdálenost od středu je $\frac{1}{2}$. Všechny delší tětivy mají vzdálenost od středu menší. Proto středy tětiv délky větší než $\sqrt{3}$ leží uvnitř kruhu o poloměru $\frac{1}{2}$. Hledaná pravděpodobnost je poměrem obsahů těchto kruhů, tedy $\frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi 1^2} = \frac{1}{4}$.



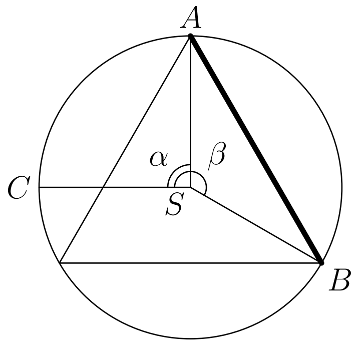
Ve druhém řešení tětivu AB popíšeme její vzdáleností v od středu a úhlem ϕ, který svírá s přímkou

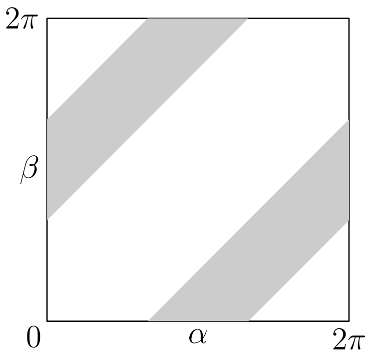
SC (C je pevně zvolený bod). Množina takových dvojic tvoří obdélník o rozměrech 1 a 2π. Pro každý úhel ϕ jsou vyhovující vzdálenosti od středu z intervalu $\langle 0, \frac{1}{2})$ (zdůvodnění je stejné jako v minulém řešení). Vyhovující možnosti tedy tvoří obdélník o obsahu $\frac{1}{2} \cdot 2\pi$, hledaná pravděpodobnost je proto $\frac{1}{2}$.





V posledním řešení popíšeme vybrané body A, B dvojicí úhlů $\alpha = |\angle ASC|$, $\beta = |\angle BSC|$, kde C je opět pevně zvolený bod. Množina všech vyhovujících dvojic tvoří čtverec o hraně 2π. Tětiva délky $\sqrt{3}$ odpovídá středovému úhlu $\frac{2\pi}{3}$, jak lze rozmyslet z náčrtu rovnostranného trojúhelníku. Pro každý úhel α vyhoví ty úhly β, které se od něj liší o více než $\frac{2\pi}{3}$. Množina vyhovujících dvojic je znázorněna na obrázku. Snadno rozmyslíme, že v tomto případě nám pravděpodobnost vyšla $\frac{1}{3}$.





Došli jsme ke třem řešením. Každé předpokládá rovnoměrnost a nezávislost rozložení jiných parametrů. Bylo by možné říci, že problém byl nedostatečně zadán. Jistý Edwin Jaynes se s tímto nespokojil a v roce 1973 publikoval článek, v němž ukazuje, že pouze metoda vedoucí k výsledku $\frac{1}{2}$ má jistě vlastnost, kterou by náhodné rozložení sečen mělo mít. Když zvolíme kružnici o poloměru 2, uvnitř ní kružnici o poloměru 1 a touto metodou budeme vybírat sečny větší kružnice, budou i sečny menší kružnice jimi určené mít rovnoměrně a nezávisle určený směr a vzdálenost od středu.

Naše úlohy jsme se ale pokusili zadat tak, abyste věděli, které parametry jsou rovnoměrně a nezávisle rozložené.

BRKOS Team 2009