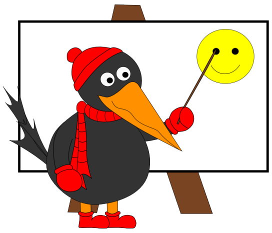
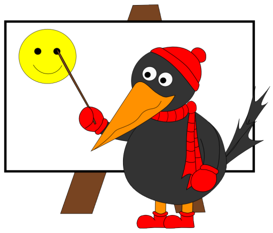


Pomocný text

NEROVNOSTI



Nejen v olympiádách jsou oblíbené úlohy typu „Dokažte, že pro všechna kladná reálná čísla x, y, z platí zadaná nerovnost, kde na levé straně vystupuje jakýsi výraz a na pravé straně taktéž“. V tomto textu si ukážeme několik triků, jak tyto úlohy řešit. Ne všechny však využijete při řešení úloh třetí série. Myslíme si ale, že by se vám mohli hodit někdy v budoucnu, například při řešení Matematické olympiády. Proto se neděste množstvím nerovností, ani se jich nemusíte bát. Spíše naopak.

Kvadrát je vždy kladný

Toto je triviální tvrzení, ale dá se využít k důkazu složitějších věcí. Například pro $x > 0$ úpravou nerovnosti $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 \geq 0$ dostáváme známou nerovnost $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Homogenní nerovnosti

Výraz $f(x_1, \ldots, x_k)$ je homogenní výraz stupně n, pokud pro $t \in \mathbb{R}$ je

$$f(tx_1, \ldots, tx_k) = t^n f(x_1, \ldots, x_k).$$

Tedy například $f(x, y) = x^2 + y^2$ je homogenní výraz stupně 2, protože $f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2 f(x, y)$.

Nerovnost mezi dvěma homogenními výrazy stejného stupně se nazývá homogenní nerovnost. Abychom mohli nerovnost převést na některou ze známých (uvedených dále v tomto textu), musíme často dokazovanou nerovnost převést na homogenní. K tomu potřebujeme nějakou pomocnou rovnost.

Například máme-li dokázat $a + b + c \leq a^2 + b^2 + c^2$ za podmínky $a + b + c = 3$, vynásobíme levou stranu výrazem $a+b+c$ a levou trojkou, po roznásobení a odečtení dostaneme $0 \leq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2$. Využitím kladnosti kvadrátu vidíme, že nerovnost platí.

Pokud dokazujeme nějakou nehomogenní nerovnost za podmínky $abc = 1$, převedeme ji na homogenní pomocí substituce $a = x/y$, $b = y/z$ a $c = z/x$.

Homogenní nerovnost platí pro $x_1, \ldots, x_k$, právě když platí pro $tx_1, \ldots, tx_k$. Proto u nich můžeme zafixovat hodnotu libovolného homogenního výrazu: např. položit $x_1 + \cdots + x_k = 1$. Musíme pak ošetřit případy, kdy se tento výraz rovná nule.

Cyklické a symetrické nerovnosti

Nerovnost s proměnnými $x_1, \ldots, x_k$ je cyklická, pokud se nahrazením x_2 za x_1, x_3 za x_2, …, x_1 za x_k nerovnost nezmění. Pokud se nezmění ani při libovolném jiném přeházení proměnných, je navíc symetrická. Je-li nerovnost symetrická, můžeme si dovolit předpokládat $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$. Pokud je pouze cyklická, můžeme akorát udělat předpoklad, že x_1 je maximem (resp. minimem) ze všech x_i.

Nerovnost mezi průměry

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_k$ jsou kladná reálná čísla a $m < n$ jsou nenulová reálná čísla. Pak

$$\sqrt[m]{\frac{x_1^m + \cdots + x_k^m}{k}} \le \sqrt[n]{\frac{x_1^n + \cdots + x_k^n}{k}}.$$

Rovnost nastává, právě když mají všechna x_i stejnou hodnotu. Výrazům na levé a pravé straně se říká průměr stupně m respektive n. Průměr stupně 1 je nám dobře známý průměr aritmetický, průměr stupně 2 se nazývá kvadratický a průměr stupně -1 harmonický. Nerovnosti mezi těmito průměry se občas označují zkratkami z prvních písmen názvů průměrů – tedy např. AH-nerovnost. Kromě takto definovaných průměrů existuje i geometrický průměr definovaný jako $\sqrt[k]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_k}$. Ten se chová jako průměr stupně 0 – je menší, než všechny průměry kladného stupně a větší než průměry stupně záporného. My si nyní formulujeme nerovnost AG, a to v její silnější (vážené) podobě.

Vážená AG nerovnost

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_k$ a $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jsou kladná reálná čísla. Položme $a_1 + \cdots + a_k = s$. Pak $\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_kx_k}{s} \ge \sqrt[s]{x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \cdots \cdot x_k^{a_k}}$. Pokud položíme $b_i = \frac{a_i}{s}$, máme

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_kx_k \ge x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \cdots \cdot x_k^{b_k}.$$

Rovnost opět nastává, mají-li proměnné stejnou hodnotu. Podobným způsobem lze přidat váhy $a_1, \ldots, a_k$ i do ostatních nerovností mezi průměry. Sílu vážené AG-nerovnosti si ukážeme na následujícím příkladu:

Příklad 1. *Dokažte, že pro $x, y, z > 0$ platí*

$$x^3y + y^3z + z^3x \ge x^2yz + y^2xz + z^2xy$$

Pokusíme se vyjádřit x^2yz jako geometrický průměr čísel x^3y, y^3z a z^3x s vahami a, b, c splňujícími $a + b + c = 1$. Chceme, aby bylo $(x^3y)^a(y^3z)^b(z^3x)^c = x^2y^2$. Porovnáním exponentů máme $3a + c = 2$, $a + 3b = 1$,$b + 3c = 1$, řešením soustavy $(a, b, c) = (\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7})$. Dostáváme tak nerovnost $\frac{4}{7}x^3y + \frac{1}{7}y^3z + \frac{2}{7}z^3x \ge x^2yz$. V ní můžeme dvěma způsoby cyklicky zaměnit proměnné. Když všechny takto vzniklé nerovnosti sečteme, dostaneme dokazovanou nerovnost. Tento postup funguje na celou řadu podobných cyklických nerovností.

Muirheadova nerovnost

Je silným nástrojem pro důkaz symetrických homogenních nerovností. Výrazem $[a_1, a_2, \dots, a_k]$, kde $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$ budeme rozumět součet výrazů $x_1^{a_{\pi(1)}} \cdot \dots \cdot x_k^{a_{\pi(k)}}$ přes všechny možné permutace π. Například $[7, 5, 4]$ je označení pro $x_1^7 x_2^5 x_3^4 + x_1^5 x_2^7 x_3^4 + x_1^4 x_2^7 x_3^5 + x_1^7 x_2^4 x_3^5 + x_1^4 x_2^5 x_3^7 + x_1^5 x_2^4 x_3^7$, $[1, 1, 1]$ je označení pro $6x_1x_2x_3$ (součin jsme započítali s každou permutací, odtud ta šestka). Muirheadova nerovnost říká, že pokud $a_1 \leq b_1$, $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$, $\dots a_1 + \dots + a_{k-1} \leq b_1 + \dots + b_{k-1}$ a $a_1 + \dots + a_k = b_1 + \dots + b_k$, pak pro nezáporná x_i platí $[a_1, \dots, a_k] \leq [b_1, \dots, b_k]$. Například tedy $[3, 1, 0] \geq [2, 1, 1]$, což po rozepsání dává

$$x^3y + y^3z + z^3x + y^3x + z^3y + x^3z \geq 2x^2yz + 2y^2xz + 2z^2xy.$$

Tuto nerovnost jsme mohli dokázat i pomocí AG nerovnosti, Muirhead pouze urychuje zápis. V tomto případě platila jak symetrická, tak pouze cyklická podoba nerovnosti. Vždy tomu tak ale být nemusí: například platí $[3, 1, 0] \geq [2, 2, 0]$, ale cyklická podoba $x^3y + y^3z + z^3x \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ neplatí pro $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$.

Cauchy-Schwarz-Bunjakowského nerovnost

Tuto nerovnost vymysleli zmínění tři pánové, kterému z nich je přepsána záleží na literatuře. Nechť $x_1, \dots x_n$, $y_1, \dots, y_n$ jsou reálná čísla. Pak

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$$

Mincová nerovnost

Nechť $x_1 \leq x_2 \leq \dots x_n$ a $y_1 \leq y_2 \leq \dots y_n$ a π je libovolná permutace na množině $\{1, \dots, n\}$. Pak

$$x_1y_1 + \dots + x_ny_n \geq x_1y_{\pi(1)} + x_2y_{\pi(2)} + \dots + x_ny_{\pi(n)} \geq x_1y_n + x_2y_{n-1} + \dots + x_ny_1. \quad (3.1)$$

Proč se jmenuje mincová? Když budete mít hromádky mincí o hodnotách x_1 až x_n a můžeme si z jedné odebrat y_1, ze druhé y_2, atd., bude pro nás nejlepší vzít y_n mincí hodnoty x_n (co nejvíce nejdražších), y_{n-1} mincí hodnoty x_{n-1} atd. Nejhorší možností je udělat to přesně naopak a jakákoliv jiná možnost (vyjádřená permutací π) je někde uprostřed, což nám přesně říká (3.1).

Příklad 2. *Nechť $a, b, c > 0$. Dokažte, že $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2$.*

Zde využijeme mincovou nerovnost. Posloupnost x_i budou tvořit čísla a^3, b^3, c^3 uspořádaná podle velikosti, posloupnost y_i čísla $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ rovněž seřazená podle velikosti. Jsou-li čísla a, b, c nějak uspořádaná (např. $a \geq b \geq c$), mají totéž uspořádání čísla a^3, b^3 a c^3, na druhou stranu čísla $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ a $\frac{1}{c}$ mají uspořádání opačné. Proto lze na tyto trojice aplikovat pravou část (3.1).

Čebyševova nerovnost

Za stejných předpokladů jako v mincové nerovnosti platí

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \geq \frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)\cdot(y_1+\cdots+y_n) \geq x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1.$$

Tuto nerovnost získáme sečtením vhodných n mincových nerovností a vydělením n.

Jensenova nerovnost

Pro Jensenovu nerovnost je klíčový pojem konvexní a konkávní funkce. Konvexní funkce je taková, že její nadgraf (množina bodů nad grafem funkce) je konvexní, tedy spojíme-li dva body nad grafem funkce, bude i celá spojnice nad grafem. Podobně konkávní funkce je taková, že spojíme-li dva body pod grafem, je i celá spojnice pod grafem. [1]

Nechť je funkce f na konvexní na intervalu I a $x_1, \ldots, x_n \in I$. Pak

$$\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right).$$

Pro konkávní funkci f platí tato nerovnost s opačným znaménkem.

Například odtud lze snadno ukázat, že pro úhly v trojúhelníku je $\frac{sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3} \leq \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Z Jensenovy nerovnosti se využitím vhodných funkcí dají dokázat nerovnosti mezi průměry.

ABC – ABstract Corectness

Na závěr bychom zde chtěli představit jednu techniku, která funguje pouze pro symetrické nerovnosti se třemi neznámými, ale vzhledem k velkému výskytu právě těchto úloh v různých soutěžích je poměrně zajímavá.

Pokud neobsahuje nerovnost žádné „divoké“ funkce, lze ji převést do tvaru $f(abc, ab+bc+ac, a+b+c) \geq 0$. Pokud je f monotónní vzhledem k prvnímu parametru [2] na celém $\mathbb{R}$, má své minimum i maximum v případě, že jsou dvě z čísel a, b, c stejná. Pokud je monotónní pouze na $\mathbb{R}_0^+$, může extrém nastat, i když je jedno z čísel nulové. Pokud předpoklad monotónnosti nahradíme předpokladem konvexity, můžeme v těchto bodech hledat pouze minima, za předpokladu konkávnosti pouze maxima.

Příklad 3. *Pro nezáporná a, b, c dokažte $a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca)$. Autorem úlohy je Darij Grinberg.*

[1] Rozlišovat konvexní a konkávní funkce pomocí obrázku může být matoucí, pro korektní zdůvodnění konvexity se zpravidla používá druhá derivace (je-li druhá derivace záporná, je funkce konkávní, je-li kladná, je konvexní).

[2] Nerostoucí nebo neklesající

Položme $p = a+b+c$, $q = ab+bc+ac$, $r = abc$. Nerovnost pak lze přepsat do tvaru $p^2 - 4q + 2r + 1 \geq 0$. Jak je vidět, levá strana je rostoucí vzhledem k r, svého minima nabývá, když mají dvě proměnné stejnou hodnotu, nebo je jedna nulová. V prvním případě BÚNO $a = b$, dokazujeme pak $2a^2 + c^2 + 2a^2c + 1 \geq 2(a^2 + 2ac)$. To lze ekvivalentně upravit na $(c-1)^2 + 2c(a-1)^2 \geq 0$, což platí. Ve druhém případě BÚNO $a = 0$, pak dokazujeme $b^2 + c^2 + 1 \geq 2bc$, což je ekvivalentní s platnou nerovností $(b - c)^2 + 1 \geq 0$.