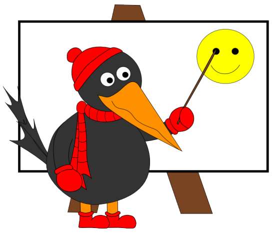
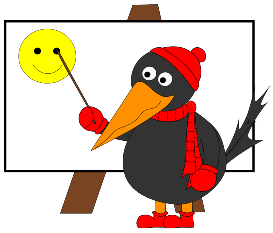


Pomocný text

Šachovnice



Kouma zahajuje partii královským gambitem. Ňouma ale místo obligátního protigambitu odhodlaně vyráží dámou na h4 a dává Koumovi šach. Kouma se však nenechává zastrašit a tahem na g3 dává Ňoumovi garde.

My teď klukům šachovnici sebereme a podíváme se na ni z matematické stránky. Nebude-li uvedeno jinak, budou se naše úvahy týkat šachovnice 8×8. Úlohy, které zde budeme řešit, jsou lehčí než úlohy soutěžní. Jde nám hlavně o to ukázat si, jak se taková úloha řeší po formální stránce, aby ti z vás, kteří řeší seminář poprvé, zbytečně neztráceli body za nedostatečná zdůvodnění.

První vlastností, kvůli které je právě šachovnice vděčným zdrojem matematických úloh, je to, že každé černé pole sousedí hranou pouze s bílými poli. Proto kůň, který jedním svým tahem urazí dvě pole jedním směrem a jedno pole směrem kolmým, změní během tahu třikrát barvu pole a skončí proto na poli opačné barvy, než ze kterého vyrážel. Toho by se dalo využít například v následující úloze:

Úloha 1. *Je možné koně přemisťovat po šachovnici podle pravidel tak, aby se po 2009 tazích přesunul z pole $a1$ (levý dolní roh) do pole $h8$ (pravý horní)?*

Intuice nám napovídá, že taková posloupnost tahů koně neexistuje (pokud nenapoví, můžeme střídavě zkoušet dokázat existenci a neexistenci a ono jedno z toho vyjde).

Mohli bychom se pokusit dokázat to přímo. Najít jednu posloupnost tahů délky 2009 začínající na $a1$ a ukázat, že nekončí na poli $h8$. Vzít druhou a ukázat totéž. *Velmi častou chybou* bývá, že se řešitel pustí do analýzy jednotlivých možností a rozebere jenom některé. V tomto případě není divu: posloupností tahů koně je mnohonásobně více, než částic ve vesmíru.

My budeme chytřejší a důkaz povedeme sporem. Abychom se do toho nezamotali, musíme si jasně vymezit, co předpokládáme. Dokazované tvrzení má dvě části: *předpoklady* (že kůň táhne podle pravidel a šachovnice má rozměry 8×8), které považujeme za pravdivé, a *dokazované tvrzení* (že neexistuje posloupnost 2009 tahů z pole $a1$ na $h8$), u nějž předpokládáme, že neplatí. Tvrdíme tedy, že taková posloupnost existuje.

Předpoklady máme, teď k samotnému důkazu. Kůň začíná na poli $a1$ černé barvy, udělá 2009 tahů (lichý počet), po posledním tahu proto musí stát na poli barvy bílé. To je ale spor s tvrzením, že skončí na poli $h8$, majícím černou barvu. Došli jsme takto ke kýženému sporu a důkaz je hotov.

Analogicky byste měli být schopni vyřešit následující úlohu:

Úloha 2. *Rozhodněte, zda je možné pomocí obdélníků* 2×1 *pokrýt šachovnici tak, aby každý obdélník zakrýval dvě sousední pole a aby byla pokryta všechna pole kromě* $a1$ *a* $h8$.

Pro spor předpokládáme, že ji takto pokrýt lze. Každý takový obdélník pokryje jedno černé a jedno bílé pole, proto musí být pokryto stejně černých a bílých polí. Protože po odtržení polí $a1$ a $h8$ je na šachovnici 30 černých a 32 bílých polí, dostáváme opět spor.

Další příklad bude o něco těžší:

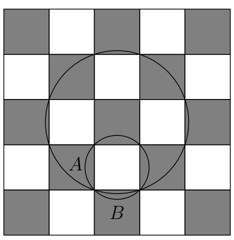
Úloha 3. *Na šachovnici* 100×100 *jsou zapsaná celá čísla tak, že rozdíl dvou sousedních je nejvýše 20. Dokažte, že nějaké číslo je zapsáno na alespoň třech polích šachovnice.*

Pro spor budeme tentokrát předpokládat, že v takovém očíslování je každé číslo nejvýše dvakrát. Políčko v a-tém řádku a b-tém sloupci budeme značit (a, b). Po poli budeme pohybovat figurkou, která se může přemístit pouze na sousední pole. Z pole $(50, 50)$ na pole (a, b) je možné se dostat $|a - 50| + |b - 50|$ tahy, z nichž při každém se hodnota pod figurkou změní nejvýše o 20. Celkově se tedy hodnota na poli (a, b) může od čísla na poli $(50, 50)$ lišit nejvýše o $20(|a - 50| + |b - 50|) \leq 2000$. Je-li na poli $(50, 50)$ hodnota h, mohou být na všech ostatních polích pouze hodnoty $h-2000, h-1999, \ldots h+2000$. Těch je 4001. Pokud by byla každá zastoupena nejvýše dvakrát, mohlo by být očíslováno jen 8002 z 10000 polí. Do třetice docházíme ke sporu a příklad je vyřešen.

Abychom si vyzkoušeli i jiný důkaz než sporem, zakončíme tento text následujícím příkladem:

Úloha 4. *Políčko šachovnice má délku strany 1. Jaký největší průměr může mít kružnice, která prochází pouze černými políčky?*

Pokud by byla celá kružnice v jenom políčku, měla by průměr nejvýše 1. Pokud prochází více políčky, musí z jednoho do druhého vždy přecházet rohem. Řekněme, že prochází rohem mezi políčky A, B. Pak musí procházet ještě jedním rohem políčka A a ještě jedním rohem B. Jsou tři možnosti jak zvolit roh políčka A a tři možnosti pro roh B, tedy celkem až 9 možných kružnic. Tři z nich degenerují v přímku, zbylých 6 je jednoho ze dvou typů, viz obrázek:



Jak vidíme, obě kružnice procházejí pouze černými políčky. Větší kružnice je opsaná obdélníku 3×1 a podle Thaletovy věty je jejím průměrem úhlopříčka tohoto obdélníku, která má délku $\sqrt{10}$.

BRKOS Team 2009