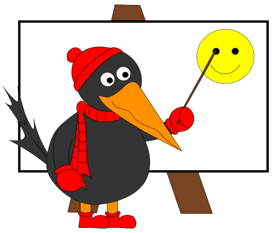
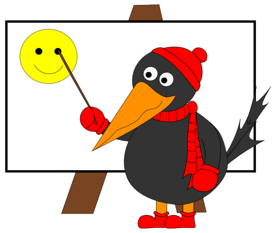


Pomocný text

Hrátky Koumy a Ňoumy



Jak název série napovídá, budeme se dnes bavit o hrách a vítězných strategiích. Her, které lze matematicky popsat, existuje nepřeberné množství. My se budeme zabývat pouze hrami, které končí buď výhrou, nebo pohrou jednoho z hráčů (vynecháme hry, v nichž záleží na tom, kolik žetonů či bodů kdo získá) a žádný z hráčů před druhým nemá žádné tajemství. Těmto hrám se poměrně podrobně věnoval Brc. Michal Bulant [1] na přednášce v Pastvinách. Kdo na soustředění nebyl, může si prohlédnout alespoň prezentaci na adrese http://bart.math.muni.cz/~brkos/files/download/prednaska.pdf.

Tyto hry mají tu výhodu, že v nich existuje buď vítězná strategie pro prvního, nebo vítěná strategie pro druhého hráče. V tomto povídání proti sobě budou hrát Ňouma s Koumou a Ňouma vždy začíná.

Zrcadlo

V některých hrách je nejjednodušší vyhrávající strategií pro některého hráče dělat tahy souměrné s tahy soupeře. Slovo „souměrné“ je poměrně vágní, jeho význam závisí na konkrétní hře. Ukažme to na dvou příkladech.

Úloha 1. *Ňouma a Kouma sedí u obdélníkového stolu a každý má dostatečně velkou zásobu pětikorun. Hráči střídavě pokládají mince na stůl tak, aby se žádné dvě nepřekrývaly. Ten, kdo nemůže umístit další minci, prohrál.*

Řešení 1. Vítězná strategie v této hře je pro prvního hráče. Řekněme, že Ňouma začíná. Ňouma umístí první minci přesně doprostřed stolu. V každém dalším tahu zobrazí poslední zahranou minci Koumy ve středové souměrnosti podle středu stolu a na toto místo položí svou. Proč toto může udělat? Po každém Ňoumově tahu je rozložení mincí na stole souměrné, proto pokud může Kouma na nějaké místo položit minci, může Ňouma položit minci na místo sdružené. A protože může Ňouma reagovat na každý tah Koumy, tak Kouma prohraje. Kdyby ale hráli na stole, který má uprostřed kruhovou díru, měl by vyhrávající strategii Kouma: vždy by hrál středově souměrně s tím, co hrál Ňouma.

[1] Titul Brkosí docent, zkracuje se Brc., je čestný titul udělovaný zvláště výjimečným osobnostem, jež se podílejí (nebo v minulosti podílely) na rozvoji tohoto semináře.

Úloha 2. *Další jednoduchá hra, v níž se dá uplatnit zrcadlo je třeba tato:*

Hráči střídavě doplňují hodnoty koeficientů $a_0, a_1, \ldots, a_5$ do polynomu $a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Ňouma vyhraje, pokud jednička nebude jeho kořenem, Kouma v opačném případě. Kdo má vítěznou strategii?

Řešení 2. Vítězná strategie existuje pro Koumu. Je taková, že když Ňouma dosadí za a_i nějakou hodnotu h, Kouma dosadí za a_{5-i} hodnotu $(-h)$. Výsledný polynom je pak vždy tvaru $ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a$. Že je 1 skutečně jeho kořenem, ověříme dosazením. Symetrie, která se zde zachovává, spočívá v tom, že po každém tahu Koumy jsou již dosazené koeficienty na pozících, které jsou sdružnené ve „středové souměrnosti“.

Vítězné a prohrávající pozice

Ve hrách, kde se oba hráči snaží o totéž a mohou dělat stejné tahy, má smysl definovat vítězné a pohrávající pozice (nebo též „stavy“). Ve vítězné pozici při vhodné strategii vyhrává ten, kdo je na tahu, nezávisle na strategii protihráče. V prohrávající pozici hráč na tahu žádnou takovou strategii nemá. Abychom byli schopni určit, pro kterého hráče existuje vítězná strategie, je potřeba zjistit, jestli je výchozí pozice prohrávající nebo vyhrávající. Začneme od pozic, které jsou pravidly definované jako prohrávající, a ty označíme písmenem P. Všechny pozice, z nichž se do P pozic dá dostat, jsou vyhrávající, označíme je písmenem N. Z neoznačených pozic vybereme ty, z nichž se dá dostat pouze do N-stavů. Ty označíme P. Pak všechny pozice, z nichž se dá alespoň jednou cestou dostat do P, označíme N. Protože předpokládáme, že jeden z hráčů vždy vyhraje, musí tento algoritmus v konečném čase označit všechny pozice. Strategie pak spočívá v tom, že její vlastník ve svém tahu vždy změní pozici z vyhrávající na prohrávající.

Úloha 3. *Ňouma a Kouma mají před sebou* 50 *sirek a střídavě je odebírají. Počet sirek, které v jednom tahu odeberou, musí být mocnina dvojky (tedy i $1 = 2^0$). Kdo nemůže odebrat další sirku, prohrál.*

Řešení 3. Stav, kdy na stole není žádná sirka, je prohrávající, označíme ho proto P. Ze stavů, kdy je na stole $1, 2, 4, 8, 16$ nebo 32 sirek se do něj umíme dostat, tyto stavy označme N. Pokud jsou na stole tři sirky, lze odebrat jednu nebo dvě, v obou případech se dostaneme do N-stavu. Pozici se třemi sirkami proto označme P. Když od pěti sirek odebereme dvě, dostaneme se do P-stavu, stav s pěti sirkami je N. Takto můžeme pokračovat dál – vzít nejmenší neoznačený stav, zjistit, jestli z něj vede cesta do P stavu a podle toho jej označit. V konečném čase se dobereme výsledku.

Místo toho si ale můžeme všimnout, že P stavy jsou přesně ty, v nichž je počet sirek n dělitelný třemi. Toto tvrzení pak snadno dokážeme indukcí: pro n menší než 6 jsme to právě ověřili. Předpokládejme, že to platí pro $n = k$, a dokažme to pro $n = k + 1$. Pokud $k + 1$ dává zbytek 1 nebo 2 po dělení třemi, odebráním jedné nebo dvou sirek nám jich zbude násobek trojky, což je podle indukčního předpokladu P-stav. Označit stav s $k + 1$ sirkami jako N bylo proto korektní. Pokud je $k + 1$ dělitelné třemi, musíme odebrat nějaký násobek trojky, abychom se dostali do nějakého P-stavu. To ale není nikdy mocnina dvou, do žádného P-stavu se proto nelze dostat. Označit stav jako P bylo proto korektní. Protože 50 není násobek trojky, je počáteční stav N, vítěznou strategii má Ňouma. Stačí mu vždy hrát tak, aby počet zbylých sirek byl dělitelný třemi.

Kradení strategií

Pokud chceme rychle rozhodnout, který z hráčů má vítěznou strategii, lze u některých her použít argument kradení strategií. Demonstrujme to na hře Hex.

Hrací pole je tvořeno částí šestiúhelníkové sítě, která má tvar kosočtverce. Hráči střídavě pokládají do pole kameny své barvy. Ňouma a Kouma sedí u dvou sousedních stran kosočtverce. Oba se snaží svými kameny pokrýt souvislou oblast, která spojuje stranu, u níž sedí, se stranou protější. Jediný způsob, jak soupeři zamezit ve výhře, je takovou oblast pokrýt. Vždy proto vyhraje právě jeden z nich.

Pro spor předpokládejme, že má Kouma vítěznou strategii. Pak ale může Ňouma zahrát svůj první tah jakkoli a na následující tahy Koumy reagovat tak, jak by Kouma reagoval na stejné tahy Ňoumy při své strategii (ignoruje přitom kámen, který umístil v prvním tahu). Jediný problém by mohl nastat, kdyby Koumova strategie nutila Ňoumu položit kámen na místo, kde leží onen přebytečný kámen. V takovém případě může zahrát na libovolné volné pole, dříve opomíjený kámen začít brát v potaz a nově položený začít ignorovat.

Analogicky se dokáže, že pokud existuje vítězná strategie na piškvorky, pak je pro prvího hráče. Na hry jako jsou šachy ale nelze argument uplatnit, protože v nich tah navíc nemusí být výhodou.