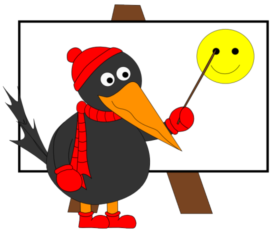
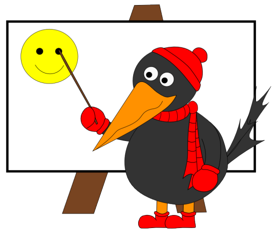


Pomocný text

GEOMETRIE



Zobrazení v planimetrii

Neformálně řečeno, zobrazení množiny A do množiny B je předpis, který každému prvku p množiny A přiřadí nějaký prvek q množiny B. Tuto skutečnost zapíšeme rovnicí

$$f(p) = q.$$

V souvislosti se zobrazeními se zavádí několik pojmů:

Definice 1. *O zobrazení řekneme, že je* injektivní *(krátce* injekcí*), pokud každým dvěma různým prvkům z A přiřadí dva různé prvky z B.*

- Funkce $\emptyset : \emptyset \to \{a, b\}$ je injektivní (ale není surjektivní).

Definice 2. *Zobrazení f nazveme* surjektivním *(krátce* surjekcí*), jestliže pro každé $q \in B$ existuje $p \in A$ tak, že $f(p) = q$.*

- Funkce $plus : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ je surjektivní (ale není injektivní).

Definice 3. *Zobrazení nazveme* bijektivním *(krátce* bijekcí*), pokud je injektivní a surjektivní zároveň. Ke každému vzájemně jednoznačnému zobrazení (tedy bijekci) lze nalézt zobrazení inverzní.*

- Funkce $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ daná předpisem

$$g(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{\textit{pro} } x \leq 0, \\ 2x & \textit{jinak} \end{cases}$$

  je bijektivní.

Zobrazení můžeme skládat. Máme-li zobrazení $f : A \to B$ a $g : B \to C$, pak jejich složením (značíme $g \circ f$) nazveme zobrazení h dané vztahem $h(x) = g(f(x))$. Budou-li skládaná zobrazení injektivní, výsledné zobrazení bude také injektivní. Totéž platí i pro surjektivní a bijektivní zobrazení.

Řekněme, že máme bijektivní zobrazení f_1, f_2 a g. Máme-li nějakou rovnost, v níž vystupují tato zobrazení a operace skládání, můžeme ji upravovat podobně, jako rovnost mezi reálými čísly s operací násobení: z rovnosti $f_1 = f_2$ plyne $f_1 \circ g = f_2 \circ g$ a $g \circ f_1 = g \circ f_2$ („násobení“ zprava a zleva).

BRKOS Team 2008

Z rovnosti $f_1 \circ g = f_2 \circ g$ plyne, že $f_1 = f_2$ (krácení zprava), obdobně funguje i krácení zleva. Oproti reálným číslům je zde jeden výrazný rozdíl:

$$f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1.$$

Nemůžeme proto „násobit“ jednu stranu rovnosti zleva a druhou zprava, nemůžeme ani výrazy na jedné straně rovnosti přeuspořádávat. Tedy skládání zobrazení není komutativní!

To by byl úvod ke zobrazením obecně, nyní se zaměřme na zobrazení v rovině. Množinou A, B i C v předchozích definicích bude nyní rovina.

V rovině umíme měřit vzdálenosti, takže můžeme mezi zobrazeními určit další dvě skupiny:

Definice 4. *Zobrazení f nazveme* shodným*, pokud pro každé dva body X, Y v rovině platí $|f(X)f(Y)| = |XY|$.*

Z předchozí definice je tedy patrné, že shodné zobrazení zachovává délky úseček.

Definice 5. *Zobrazení f nazveme* podobným *s koeficientem podobnosti k, pokud pro každé dva body X, Y v rovině platí $|f(X)f(Y)| = k \cdot |XY|$.*

Shodná i podobná zobrazení můžeme rozdělit na přímá a nepřímá podle toho, jestli zachovávají orientaci, nebo ne. Pokud je trojúhelník ABC popsán obvyklým způsobem (proti směru chodu hodinových ručiček), jeho obraz $A'B'C'$ bude v přímé podobnosti popsán také proti směru chodu hodinových ručiček, v nepřímé podobnosti bude popsán naopak.

Mezi přímé shodnosti patří otočení (jehož zvláštním případem je středová souměrnost) a posunutí. Nepřímým zobrazením je například osová souměrnost.

Otočení okolo bodu A o úhel α značíme $R_{A,\alpha}$ (protože se pro něj používá i pojem *rotace*). Posunutí o vektor $\vec{v}$ značíme $T_{\vec{v}}$ (ze slova *translace*). Osovou souměrnost podle osy o značíme O_o.

Přímá podobnost je například stejnolehlost s kladným koeficientem.

Definice 6. Stejnolehlost *se středem A a koeficientem $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ je zobrazení, které přiřadí bodu X bod Y takový, že $|AY| = |k| \cdot |AX|$, a platí, že pokud $k > 0$, pak bod Y leží na polopřímce AX a pokud $k < 0$, leží Y na polopřímce k AX opačné. Tuto stejnolehlost značíme $H_{A,k}$.*

Dalším příkladem podobného zobrazení je spirální podobnost.

Definice 7. Spirální podobností *se středem S, koeficientem k a úhlem α nazveme zobrazení $H_{S,k} \circ R_{S,\alpha} = R_{S,\alpha} \circ H_{S,k}$ (Spirální podobnost je složení stejnolehlosti H a rotace R, pro kterou platí uvedená rovnost).*

Věta 1. *Každé přímo shodné zobrazení lze získat složením dvou osových souměrností, každé nepřímo shodné zobrazení je postupným složením třech osových souměrností.*

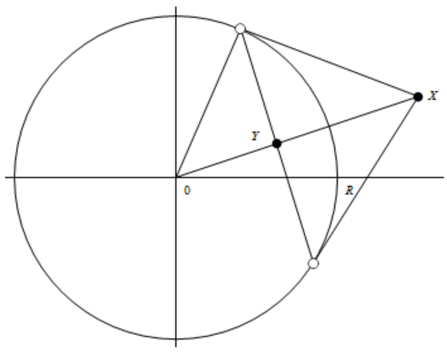
Například posunutí o vzdálenost d ve směru přímky p získáme jako složení osových souměrností podle rovnoběžek q_1, q_2 kolmých na p, jejichž vzdálenost je $d/2$. Otočení o úhel α kolem bodu P získáme složením osových souměrností podle přímek p_1, p_2, které prochází bodem P a svírají úhel $\frac{\alpha}{2}$. Z předchozích dvou tvrzení plyne, že každá přímá shodnost je buď otočení nebo posunutí.

Věta 2. *Nechť X je pevně daný bod. Pak každé přímo podobné zobrazení lze získat složením spirální podobnosti se středem X a vhodného posunutí.*

Závěrem uvedeme příklad jednoho zobrazení, které není podobné, ale přesto má zajímavé vlastnosti. Tím zobrazením je kruhová inverze (názorný obrázek dole).

Definice 8. *Nechť je dána kružnice $k(S, r)$.* Kruhová inverze *podle kružnice k přiřadí bodu X bod Y na polopřímce SX takový, že $|SX| \cdot |SY| = r^2$.*

Snadno nahlédneme, že body kružnice k se zobrazí samy na sebe, body ležící vně kružnice k se zobrazí do její vnitřní oblasti a body uvnitř k (kromě bodu S, pro který není jeho obraz definován) se zobrazí ven. O něco těžší je dokázat, že kružnice, která neprochází bodem S, se zobrazí na kružnici, kružnice, která prochází bodem S se zobrazí na přímku a přímka se zobrazí na kružnici procházející bodem S. V případě kružnice zobrazené na kružnici ale neplatí, že by se střed jedné zobrazil na střed druhé.



Více se o kruhové inverzi můžete dozvědět z učebního textu prof. Josefa Janyšky: http://math.muni.cz/~janyska/inv.ps.

BRKOS Team 2008