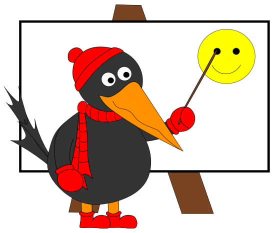
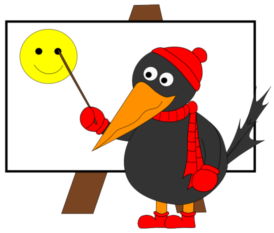


Pomocný text

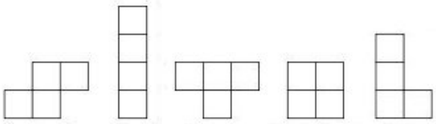
TETROMINO



I když tento pojem možná slyšíte poprvé, s tím, co se za ním skrývá, jste se už určitě setkali. Rozhodně pokud jste někdy hráli tetris.

Definice 1. Tetrominem *nazýváme souvislou oblast pokrytou čtyřmi jednotkovými čtverci, z nichž každý má stranu společnou alespoň s jedním dalším. Jednotkovým čtvercům v tomto textu budeme říkat buňky.*

Pokud považujeme dvě osově souměrná tetromina za shodná, máme pět typů tetromin:



Prvnímu tetrominu říkáme *liché*, čtvrtému *čtvercové*. Častěji se ovšem setkáte s ozačením písmenným. Tetromina se postupně nazývají S, I, T, O, L. Pokud osově souměrná tetromina za shodná nepovažujeme, pak je těchto typů sedm. K již zmíněným přibudou Z (někdy též N) a J tetromina.

Krom tetromin existují i další podobné obrazce. Polyomino řádu n je souvislá oblast složená z n buněk, z nichž každá má společnou stranu s alespoň jednou další. Polyominům řádu 3 se říká triomina, polyominům řádu 5 pentomina, atd. Tetromino je tedy označení pro polyomino řádu 4.

V souvislosti s tetrominy nejčastěji zkoumáme, jakou oblast jimi můžeme pokrýt. Pokud dokazujeme, že oblast pokrýt lze, stačí takové pokrytí nalézt. Dokázat opak bývá těžší. Dá se k tomu využít celá řada metod, my se v tomto textu zmíníme o třech.

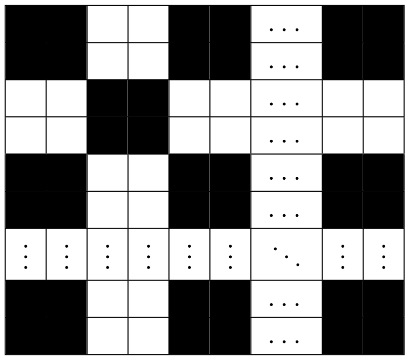
4.1 Metoda obarvení

Metoda obarvení spočívá v tom, že si oblast, kterou máme pokrýt, šikovně obarvíme a pak počítáme, kolik buněk které barvy pokryjí jednotlivá tetromina, a snažíme se dojít ke sporu. Nejlepší bude, když to ukážeme na příkladu:

Úloha 4.1. *Pro která* m, n *lze obdélník o* $m \times n$ *buňkách pokrýt tetrominy* 1×4*?*

Řešení. Pokud je m dělitelné čtyřmi, obdélník rozdělíme na pásy $4 \times n$, z nichž každý lze zřejmě pokrýt n tetrominy umístěnými vedle sebe. Stejně tak pokud $4|n$.

Nyní ukažme, že pokud 4 nedělí m ani n, není možné obdélník pokrýt. Pro spor předpokládejme, že to lze. Plocha obdélníka musí být dělitelná čtyřmi, takže pokud není m ani n dělitelné čtyřmi, musí být obě tato čísla dělitelná dvěma. Obdélník rozdělíme na čtverce 2×2 a ty obarvíme jako šachovnici.



Je tedy patrné, že každé tetromino pokryje dvě bílé a dvě černé buňky. Když pokryjeme celou plochu, musí být pokryto stejně bílých jako černých buněk. Počet černých čtveřic buněk musí být stejný jako počet bílých. Celkový počet buněk je dělitelný osmi, takže jedna strana obdélníka je dělitelná čtyřmi, což je spor s předpokladem.

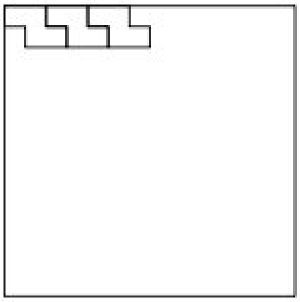
U složitějších úloh nevystačíme se dvěma barvami. Kdybychom zjišťovali, jaké obdélníky lze pokrýt pentominy 5×1, potřebovali bychom barev pět.

4.2 Metoda lokálního uspořádání

Tato metoda spočívá v tom, že předpokládáme, že nějaký útvar jde zadanými tetrominy pokrýt. Vybereme si nějaké místo, které lze pokrýt jen několika málo způsoby a pro všechny ukážeme, že znemožňují pokrytí celého obrazce. Ukážeme si to na následujícím příkladu:

Úloha 4.2. *Dokažte, že žádný čtverec nelze pokrýt lichými tetrominy.*

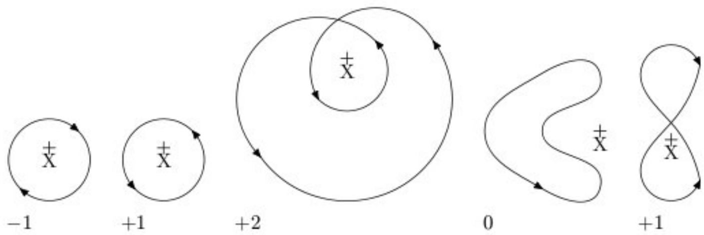
Řešení. Jsou pouze dvě možnosti, jak pokrýt levou horní rohovou buňku, ty jsou navíc souměrné podle úhlopříčky. Předpokládejme tedy BÚNO, že je delší hrana tetromina rovnoběžná s vodorovnou stranou čtverce. Buňku v horním řádku, která s tímto tetrominem sousedí, je možné pokrýt jen jedním způsobem. Po přidání dalšího tetromina zase dostaneme buňku, kterou pokryjeme jen jedním způsobem, atd. Po konečném počtu kroků už nemůžeme přidat další tetromino a vidíme, že pravá horní rohová buňka čtverce zůstane nepokryta. Tím je důkaz hotov.



4.3 Metoda dvou měst

Může nám pomoci tam, kde předchozí dvě selhávají, ale prozradím vám, že k řešení čtvrté série ji nebudete potřebovat. Než se dostaneme k hlavní myšlence, budeme potřebovat dvě definice

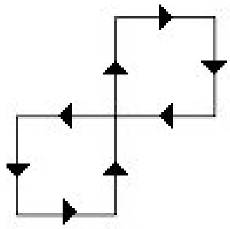
Definice 2. Počtem závitů *orientované křivky k kolem bodu X, který na ní neleží, rozumíme krozdíl $K - Z$, kde K je počet průsečíků k s libovolně zvolenou polopřímkou XY v kladném smyslu (proti smyslu chodu hodinových ručiček) a Z počet průsečíků k s polopřímkou YX ve smyslu záporném (ve smyslu chodu hodinových ručiček).*



Pokud má k stejný počet závitů kolem všech bodů v jedné buňce, můžeme tento počet nazvat *počtem závitů k kolem buňky.*

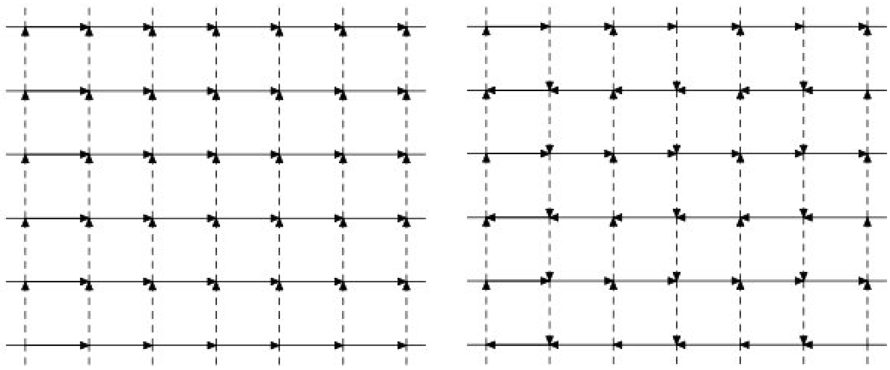
Definice 3. Orientovaným obsahem *plochy složené z buněk ohraničené křivkou k rozumíme součet počtů závitů k přes všechny buňky této plochy.*

Pro polyomino řádu n je orientovaný obsah vždy roven n nebo $-n$ podle toho, jak jeho hranici orientujeme. Pro jiné oblasti takovýto vztah obecně neplatí, existují oblasti o nulovém orientovaném obsahu, například ta na obrázku:



BRKOS Team 2008

Nyní se již můžeme podívat, co znamená metoda dvou měst. Každé z nich je tvořeno nekonečnou čtvercovou sítí. Přímky, které tuto síť tvoří, odpovídají jednosměrným ulicím. V prvním městě směřují všechny ulice doprava a nahoru, ve druhém pravidelně střídají směry (viz obrázek).



Každou oblast v prvním městě lze popsat pomocí symbolů $x+$, $x-$, $y+$ a $y-$. Ty odpovídají navigaci pro auto. Symbol $x+$ znamená jeď vodorovně přikázaným směrem, symbol $x-$ vodorovně couvej, analogicky instrukce pro svislý směr.

Pokud dáme tu samou sadu instrukcí řidičovi ve druhém městě, ten také ujede nějakou trasu, ale jinou než řidič v prvním. Američan James Propp, který metodu dvou měst v roce 1997 publikoval, přišel na několik zajímavých skutečností:

- Pokud obejdeme v prvním městě po hranici útvaru, který lze vydláždit lichými tetrominy a čtvercovými tetrominy, pak obejdeme v druhém městě uzavřenou křivku.
- Pokud obejdeme v prvním městě hranici útvaru, který lze vydláždit lichými tetrominy, pak obejdeme v druhém městě uzavřenou křivku s orientovaným obsahem 0.
- Pokud obejdeme v prvním městě po hranici útvaru U , který lze vydláždit lichými tetrominy a čtvercovými tetrominy, pak obejdeme v druhém městě uzavřenou křivku, která má invariantní orientovaný obsah vzhledem ke konkrétnímu dláždění útvaru U.

Důkazy těchto tvrzení a spoustu dalších pěkných poznatků o polyominech a jejich zobecněních pro trojúhelníkovou a šestiúhelníkovou síť najdete v práci Evy Černohorské na adrese http://evajs.wz.cz/soc.pdf.

Tímto bych chtěl za orgy Evě poděkovat za obrázky a texty ze zmíněné práce, které tvoří větší část dnešního povídání.

BRKOS Team 2008